7 | Primitives et calcul intégral

Cahier de calcul : fiches 15 à 19. **Banque CCINP :** $\varnothing$.

Primitives

Exercice 1 ○○○○ ☑ Donner une primitive de f sur l'intervalle I.

1. $f(x) = 2x^3 - \dfrac{1}{x^2}$ et $I =]0\,,+\infty[$.
2. $f(x) = 3 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{5}{x^3}$ et $I =]-\infty\,,0[$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $I =]0\,,+\infty[$.
4. $f(x) = \sqrt{x}$ et $I =]0\,,+\infty[$.
5. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $I =]0\,,+\infty[$.
6. $f(x) = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{4}{\sqrt{x}}$ et $I =]0\,,+\infty[$.
7. $f(x) = \mathrm{e}^x$ et $I = \mathbb{R}$.
8. $f(x) = 3x - 2\,\mathrm{e}^x$ et $I = \mathbb{R}$.
9. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $I =]0\,,+\infty[$.
10. $f(x) = \dfrac{-4}{x}$ et $I =]-\infty\,,0[$.
11. $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ et $I =]1\,,+\infty[$.
12. $f(x) = \dfrac{3}{(3x-2)^2}$ et $I = \left]\frac{2}{3}\,,+\infty\right[$.
13. $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $I = \mathbb{R}$.
14. $f(x) = 4\,\mathrm{e}^{0{,}3x}$ et $I = \mathbb{R}$.
15. $f(x) = x\,\mathrm{e}^{x^2}$ et $I = \mathbb{R}$.
16. $f(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^{3x^2+6x-4}$ et $I = \mathbb{R}$.
17. $f(x) = \dfrac{4x^3 - 3x^2 + 1}{x}$ et $I =]-\infty\,,0[$.
18. $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ et $I =]0\,,+\infty[$.

Exercice 2 ●●○○ ☑ Déterminer une primitive des fonctions suivantes.

1. $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$.
2. $x \longmapsto \dfrac{2-5x}{1+x^2}$.
3. $x \longmapsto \dfrac{3x+2}{2x^2-4x+3}$.
4. $x \longmapsto \dfrac{x+3}{x^2-2x+5}$.

Exercice 3 ●○○○ ☑ Calculer, en utilisant l'exponentielle complexe,

1. l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^t \sin(3t)\,\mathrm{d}t$;
2. une primitive de $x \longmapsto \sin x \operatorname{sh} x$.

Exercice 4 ●●○○ ☑
Déterminer, sans aucun calcul d'intégrale, une primitive des fonctions suivantes (on précisera les intervalles maximaux de définition associés).

1. $x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{-x^2}$.
2. $x \longmapsto \dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}$.
3. $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2}$.
4. $x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln x}$.
5. $x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
6. $x \longmapsto \dfrac{1}{x}(\ln x)^2$.
7. $x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{-3x^2}$.
8. $x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln^4 x}$.
9. $x \longmapsto \dfrac{x^2}{1+x^3}$.
10. $x \longmapsto \dfrac{\sin(2x)}{1+\cos^2 x}$.
11. $x \longmapsto \tan^2 x$.
12. $x \longmapsto \dfrac{1}{\cos^2 x\sqrt{\tan x}}$.
13. $x \longmapsto \dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$.
14. $x \longmapsto \dfrac{\ln\ln x}{x}$.
15. $x \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x + x}$.
16. $x \longmapsto \dfrac{1}{x + x\ln^2 x}$.
17. $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}$.
18. $x \longmapsto \dfrac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

Exercice 5 ●●○○ Soit $f \in \mathscr{C}([0\,,1],\mathbb{R})$. Montrer que f possède une et une seule primitive F sur $[0\,,1]$ telle que $\displaystyle\int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Exercice 6 ●●○○ **Une fonction qui n'admet pas de primitive**
Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ -1 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 ●●○○ **Primitive d'une fonction non continue**
Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

est la primitive sur $\mathbb{R}$ d'une fonction non continue.

Calculs d'intégrales

Exercice 8 ○○○○ ☑ Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_2^3 \left(t^2+t+1\right)\mathrm{d}t.$ **2.** $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^5 \frac{1}{1-2t}\,\mathrm{d}t.$ **3.** $\displaystyle\int_0^2 \left(2x+1+\frac{3}{2x+3}\right)\mathrm{d}x.$

4. $\displaystyle\int_0^{\ln 5} \left(5+4\,\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{2x}\right)\mathrm{d}x.$ **5.** $\displaystyle\int_1^0 \mathrm{e}^{2u}\,\mathrm{d}u.$ **6.** $\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{u}{u+1}\,\mathrm{d}u.$

Exercice 9 ●○○○ ☑ Calculer les intégrales suivantes, où $n\in\mathbb{N}$.

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(2x+1)^2}\,\mathrm{d}x.$ **2.** $\displaystyle\int_{-2}^1 \frac{14}{(4-x)^3}\,\mathrm{d}x.$ **3.** $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^2 \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x.$

4. $\displaystyle\int_{\mathrm{e}^{-3}}^{\mathrm{e}^{-2}} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}.$ **5.** $\displaystyle\int_3^4 \frac{x-1}{x^2}\,\mathrm{d}x.$ **6.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+x}\,\mathrm{d}x.$

7. $\displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+4x}}.$ **8.** $\displaystyle\int_2^1 \mathrm{e}^x\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)\mathrm{d}x.$ **9.** $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{4x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$

10. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{(\ln x)^2}{x}\,\mathrm{d}x.$ **11.** $\displaystyle\int_0^1 3\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}+1}\,\mathrm{d}x.$ **12.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x.$

13. $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2}.$ **14.** $\displaystyle\int_{-1}^{1/2} \frac{x^2}{1-x^3}\,\mathrm{d}x.$ **15.** $\displaystyle\int_{1/2}^2 (x-1)\left(\frac{x^2}{2}-x+3\right)\mathrm{d}x.$

16. $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln x}}.$ **17.** $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x.$ **18.** $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

19. $\displaystyle\int_3^4 (3-x)^n\,\mathrm{d}x.$ **20.** $\displaystyle\int_1^2 (3x-2)^n\,\mathrm{d}x.$ **21.** $\displaystyle\int_1^2 x(x^2-1)^n\,\mathrm{d}x.$

Exercice 10 ●○○○ ☑

1. **a.** Déterminer deux réels a et b tels que $\displaystyle\frac{1}{(t+1)(t-2)}=\frac{a}{t+1}+\frac{b}{t-2}.$

b. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_3^5 \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t-2)}.$

2. **a.** Déterminer trois réels a, b et c tels que $\displaystyle\frac{1}{t(t^2-4)}=\frac{a}{t}+\frac{b}{t-2}+\frac{c}{t+2}.$

b. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_3^4 \frac{4}{t(t^2-4)}\,\mathrm{d}t.$

Exercice 11 ●●○○ 💡☑ Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x\,\mathrm{d}x.$ **2.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\sin(3x)\,\mathrm{d}x.$

Exercice 12 ●○○○ 💡☑ Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 \max\{\mathrm{e}^t,2\}\,\mathrm{d}t.$ **2.** $\displaystyle\int_0^1 |3t-1|\,\mathrm{d}t.$ **3.** $\displaystyle\int_0^n \mathrm{e}^{\lfloor t\rfloor}\,\mathrm{d}t$, avec $n\in\mathbb{N}$.

4. $\displaystyle\int_0^4 \sin\frac{\lfloor x\rfloor\pi}{4}\,\mathrm{d}x.$ **5.** $\displaystyle\int_{-1}^2 x|x|\,\mathrm{d}x.$ **6.** $\displaystyle\int_{-2}^5 \frac{|x+1|}{|x|+1}\,\mathrm{d}x.$

Exercice 13 ●●○○ 💡 **Une formule sommatoire pour π**

1. Montrer que, pour tout $x\in\,]-\pi/2\,,\pi/2[$, $\displaystyle\int_0^{\tan x}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=x.$

2. Établir, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}+(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

3. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{4}$, ce que l'on note $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{4}.$

Fonction définie par une intégrale

Exercice 14 ●○○○ ☑

1. Montrer que, pour tout réel x, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{tx}\,\mathrm{d}t$ existe.

2. Étudier la monotonie sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x)=\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{tx}\,\mathrm{d}t.$

Exercice 15 ●●○○ ☑ Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Calculer

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad\text{et}\qquad \lim_{x\to0}\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 16 ●●○○ Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$G(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier la définition et la dérivabilité de G.
2. Calculer G' et en déduire la monotonie de G.
3. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} G = 0$ et $\lim\limits_{0} G = -\infty$.

Exercice 17 ●●○○
Étudier la dérivabilité et dériver les fonctions suivantes.

1. $x \longmapsto \displaystyle\int_1^{x^2} \mathrm{e}^{5\sqrt{3\ln t}}\,\mathrm{d}t.$
2. $x \longmapsto \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2}.$
3. $x \longmapsto \displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\cos(tx)}{t}\,\mathrm{d}t.$

Exercice 18 ●●○○ Soit $\varphi : x \longmapsto \displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\,\mathrm{d}t$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

1. Montrer que φ est impaire.
2. Montrer soigneusement que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
3. Montrer que la fonction $\psi : x \longmapsto x\varphi'(x)$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. En déduire une expression de φ sur $\mathbb{R}_+^*$, puis sur $\mathbb{R}^*$.

Intégration par parties

Exercice 19 ●●○○
À l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$
2. $\displaystyle\int_1^2 x\ln x\,\mathrm{d}x.$
3. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (x-\mathrm{e})\ln x\,\mathrm{d}x.$
4. $\displaystyle\int_0^1 x^3\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x.$
5. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2\,\mathrm{d}x.$
6. $\displaystyle\int_0^2 (2-x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$
7. $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$
8. $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^3}\,\mathrm{d}x.$
9. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x.$

Exercice 20 ●●○○ Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{Arctan} x\,\mathrm{d}x.$
2. $\displaystyle\int_0^1 x(\operatorname{Arctan} x)^2\,\mathrm{d}x.$
3. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (x\ln x)^2\,\mathrm{d}x.$

Exercice 21 ●●○○ À l'aide d'intégrations par parties, déterminer une primitive des fonctions suivantes sur un intervalle à préciser.

1. $x \longmapsto \dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}.$
2. $x \longmapsto \cos(\ln x).$
3. $x \longmapsto x^\alpha \ln x$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. Arcsin.
5. Arctan.
6. $x \longmapsto x\operatorname{ch} x.$

Exercice 22 ●●○○ Soit P un polynôme de degré n.
Montrer que $x \longmapsto P(x)\,\mathrm{e}^x$ admet une primitive de la forme $x \longmapsto Q(x)\,\mathrm{e}^x$, avec Q un polynôme de degré n.

Exercice 23 ●●○○ **Intégrales de Wallis** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,\mathrm{d}t.$$

1. **a.** Calculer I_0 et I_1.
   b. En intégrant par parties, exprimer I_n en fonction de I_{n-2}.
   c. En déduire les expressions de I_{2n} et I_{2n+1} en fonction de n.
2. **a.** Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}.$$
   b. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n\sqrt{2n} = \sqrt{\pi}$.

Exercice 24 ●●●○

1. Calculer, pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $\quad I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q\,\mathrm{d}x.$
2. En déduire une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} \frac{(-1)^k}{p+k+1}$, pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.

Exercice 25 ●●○○ **Lemme de Riemann-Lebesgue**
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment $[a\,,b]$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Changement de variable

Exercice 26 ●●○○

À l'aide d'un changement de variable, calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1}$ en posant $u=\mathrm{e}^x$.
2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x+2\sqrt{x}}$ en posant $u=\sqrt{x}$.
3. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ en posant $u=\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$.
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}$ en posant $u=\sqrt{1+\mathrm{e}^x}$.
5. $\displaystyle\int_8^{27} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x}}$ en posant $u=\sqrt[3]{x}$.
6. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ en posant $u=\sqrt{x}$.

Exercice 27 ●●○○

À l'aide d'un changement de variable, calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_{-1}^1 t^2\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ en posant $t=\sin\theta$.
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1}$ en posant $x=\mathrm{e}^t$.
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta}$ en posant $x=\sin\theta$.
4. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\ln t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ en posant $u=\dfrac{1}{t}$.
5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+t+1}}$ en posant $x=\sqrt{t^2+t+1}-t$.

Exercice 28 ●●○○ On pose $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2 t}{\cos(2t)}$ et $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 t}{\cos(2t)}$.

1. Calculer $I-J$.
2. Calculer $I+J$ en posant $x=\tan t$.
3. En déduire I et J.

Exercice 29 ●●○○ Déterminer, au moyen d'un changement de variable, une primitive des fonctions suivantes.

1. $\dfrac{1}{\cos}$ (en posant $t=\sin\theta$) et $\dfrac{1}{\sin}$ (en posant $t=\cos\theta$).
2. $\dfrac{1}{\mathrm{ch}}$ et $\dfrac{1}{\mathrm{sh}}$ (en posant $u=\mathrm{e}^t$).
3. $x\longmapsto\cos(2\ln x)$ (en posant $u=\mathrm{e}^t$).

Exercice 30 ●●●○ — Primitives par recollement

1. Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de $t\longmapsto\dfrac{1}{2+\cos t}$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{2+\cos t}$. *On posera* $u=\tan\dfrac{t}{2}$.

Indications

Exercice 11. Il convient de linéariser.

1. $\cos^4 x = \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$.

2. $\cos^2 x \sin(3x) = \frac{1}{4}\sin(5x) + \frac{1}{2}\sin(3x) + \frac{1}{4}\sin(x)$.

Exercice 12. Découper les intégrales à l'aide de la relation de Chasles.

Exercice 13. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2k+1} = \int_0^1 t^{2k}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 22. Récurrence sur le degré de P.

Exercice 24. Commencer par montrer que $I_{p,q} = \frac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}$.

Éléments de réponses

Exercice 1. **1.** $F(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{x}$. **2.** $F(x) = 3x - \frac{1}{x} + \frac{5}{2x^2}$. **3.** $F(x) = 2\sqrt{x}$.

4. $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} = \frac{2}{3}x^{3/2}$. **5.** $F(x) = -\frac{1}{x} - 2\sqrt{x}$. **6.** $F(x) = -\frac{1}{2x^2} + 8\sqrt{x}$.

7. $F(x) = \mathrm{e}^x$. **8.** $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2\,\mathrm{e}^x$. **9.** $F(x) = \ln x$. **10.** $F(x) = -4\ln(-x) = -4\ln|x|$.

11. $F(x) = \frac{-1}{x-1}$. **12.** $F(x) = \frac{-1}{3x-2}$. **13.** $F(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}$. **14.** $F(x) = \frac{40}{3}\,\mathrm{e}^{0,3x}$.

15. $F(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x^2}$. **16.** $F(x) = \frac{1}{6}\,\mathrm{e}^{3x^2+6x-4}$. **17.** $F(x) = \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \ln(-x)$.

18. $F(x) = \frac{-2}{\sqrt{x}}$.

Exercice 2. **1.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{3}(2x+1)}{3}\right)$. **2.** $2\operatorname{Arctan} x - \frac{5}{2}\ln\left(x^2+1\right)$.

3. $\frac{5\sqrt{2}}{2}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{2}(x-1)\right) + \frac{3}{4}\ln\left(2x^2-4x+3\right)$.

4. $2\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}(x-1)\right) + \frac{1}{2}\ln\left(x^2-2x+5\right)$.

Exercice 3. **1.** $\frac{3}{10}(\mathrm{e}^{\pi}+1)$. **2.** $x \longmapsto \frac{1}{2}(\operatorname{ch} x \sin x - \operatorname{sh} x \cos x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. **1.** $-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$. **2.** $2\sqrt{\ln x}$ sur $]1\,,+\infty[$. **3.** $-\,\mathrm{e}^{1/x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$.

4. $\ln(|\ln x|)$ sur $]1\,,+\infty[$ ou $]0\,,1[$. **5.** $\sqrt{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$. **6.** $\frac{1}{3}(\ln x)^3$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

7. $-\frac{1}{6}\,\mathrm{e}^{-3x^2}$ sur $\mathbb{R}$. **8.** $-\frac{1}{3\ln^3 x}$ sur $]0\,,1[$ ou $]1\,,+\infty[$

9. $\frac{1}{3}\ln\left|x^3+1\right|$ sur $]-\infty\,,-1[$ ou $]-1\,,+\infty[$. **10.** $-\ln\left(1+\cos^2 x\right)$ sur $\mathbb{R}$.

11. $-x+\tan x$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.** $2\sqrt{\tan x}$ sur $\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

13. $2\ln(1+\sqrt{x})$ sur $\mathbb{R}_+^*$. **14.** $\ln(x)\ln(\ln x) - \ln x$ sur $]1\,,+\infty[$. **15.** $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$ sur $\mathbb{R}$.

16. $\operatorname{Arctan}(\ln x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. **17.** $2\operatorname{Arctan}(\sqrt{x})$ sur $\mathbb{R}_+^*$. **18.** $2\sqrt{1+\ln x}$ sur $\left]\mathrm{e}^{-1}\,,+\infty\right[$.

Exercice 8. **1.** $\frac{59}{6}$. **2.** $\frac{1}{2}\ln 2 - \ln 3$. **3.** $6 + \frac{3}{2}\ln\frac{7}{3}$. **4.** $4 + 5\ln 5$. **5.** $\frac{1-\mathrm{e}^2}{2}$. **6.** $1 + \ln 2$.

Exercice 9. **1.** $\frac{1}{15}$. **2.** $\frac{7}{12}$. **3.** $\frac{(\ln 2)^2-1}{2}$. **4.** $\ln\frac{2}{3}$. **5.** $\ln\frac{4}{3} - \frac{1}{12}$. **6.** $\ln(\mathrm{e}+1)$. **7.** 1.

8. $-\,\mathrm{e}^2\ln 2$. **9.** $2\ln 3$. **10.** $\frac{1}{3}$. **11.** $6(\mathrm{e}-\sqrt{\mathrm{e}})$. **12.** $\ln(\mathrm{e}+1)$. **13.** $\frac{1}{2}$. **14.** $\frac{4}{3}\ln 2 - \frac{1}{3}\ln 7$.

15. $\frac{135}{128}$. **16.** $2\sqrt{2}-2$. **17.** $\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}$. **18.** $\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$. **19.** $\frac{(-1)^n}{n+1}$. **20.** $\frac{4^{n+1}-1}{3(n+1)}$.

21. $\frac{3^{n+1}}{2(n+1)}$.

Exercice 10. **1.a.** $a = -\frac{1}{3}$ et $b = \frac{1}{3}$. **1.b.** $\frac{\ln 2}{3}$.

2.a. $a = -\frac{1}{4}$ et $b = c = \frac{1}{8}$. **2.b.** $\frac{3}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 5 - \ln 2$.

Exercice 11. **1.** $\frac{1}{4} + \frac{3\pi}{32}$. **2.** $\frac{7}{15}$.

Exercice 12. **1.** $2\ln 2 + \mathrm{e} - 2$. **2.** $\frac{5}{6}$. **3.** $\frac{\mathrm{e}^n - 1}{\mathrm{e} - 1}$. **4.** $1 + \sqrt{2}$. **5.** $\frac{7}{3}$. **6.** $5 - 2\ln 3 + 4\ln 2$.

Exercice 14. **2.** f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15. $f(0)$.

Exercice 16. **2.** $G'(x) = \frac{2\,\mathrm{e}^{-x^2} - \mathrm{e}^{-x}}{x}$ et G' change de signe en $\frac{1+\sqrt{1+4\ln 2}}{2}$.

3. $\lim_{0} G = -\infty$ et $\lim_{+\infty} G = 0$.

Exercice 17. **1.** $x \longmapsto 2x\,\mathrm{e}^{5\sqrt{6\ln x}}$ sur $[1\,,+\infty[$. **2.** $x \longmapsto \frac{3x^2}{1+x^3+x^6} - \frac{2x}{1+x^2+x^4}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18. **1.** Procéder au changement de variable $u = -t$.

2. $\varphi'(x) = \frac{1}{x}\left(\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}\frac{1}{x}\right)$. **4.** $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\ln x & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2}\ln(-x) & \text{si } x < 0. \end{cases}$

Exercice 19. **1.** 1. **2.** $2\ln 2 - \frac{3}{4}$. **3.** $\frac{\mathrm{e}^2 - 4\,\mathrm{e} + 1}{4}$. **4.** $\frac{1}{2}$. **5.** $\mathrm{e} - 2$. **6** $1 + \mathrm{e}^{-2}$. **7** $\mathrm{e} - 5\,\mathrm{e}^{-1}$.

8. e^2. **9.** $\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4}$.

Exercice 20. **1.** $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$. **2.** $\frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}$. **3.** $\frac{5}{27}\,\mathrm{e}^3 - \frac{2}{27}$.

Exercice 21. **1.** $x \longmapsto \frac{x^2-2}{3}\sqrt{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$. **2.** $x \longmapsto \frac{x}{2}(\cos(\ln x) + \sin(\ln x))$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. $x \longmapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left(\ln x - \frac{1}{\alpha+1}\right)$ si $\alpha \neq -1$ et $x \longmapsto \frac{(\ln x)^2}{2}$ si $\alpha = -1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. $x \longmapsto x\operatorname{Arcsin}(x) + \sqrt{1-x^2}$ sur $]-1\,,1[$. **5.** $x \longmapsto x\operatorname{Arctan}(x) - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$ sur $\mathbb{R}$.

6. $x \longmapsto x\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 23. **1.a** $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$. **1.b** $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.

1.c $I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!^2} \times \frac{\pi}{2}$ et $I_{2n+1} = \frac{2^{2n}n!^2}{(2n+1)!}$

Exercice 24. **1.** et **2.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}\frac{(-1)^k}{p+k+1}=I_{p,q}=\frac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

Exercice 26. **1.** $\ln 2-\ln(\mathrm{e}+1)+1$. **2.** $2\ln\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{3}\right)$. **3.** 2. **4.** $\ln\left(\dfrac{\left(\sqrt{1+\mathrm{e}}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{1+\mathrm{e}}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}\right)$.

5. $3\ln\dfrac{4}{3}+\dfrac{9}{2}$. **6.** $1+4\ln\dfrac{2}{3}$.

Exercice 27. **1.** $\dfrac{\pi}{8}$. **2.** $\ln 2-\ln(\mathrm{e}+1)+1$. **3.** $\dfrac{\ln 3}{2}$. **4.** 0. **5.** $\ln\left(\dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}\right)$.

Exercice 28. $I-J=\dfrac{\pi}{6}$ et $I+J=\dfrac{\ln\left(7+4\sqrt{3}\right)}{4}$.

Exercice 29. **1.** $x\longmapsto\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)$ sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[+\pi\mathbb{Z}$ et $x\longmapsto\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)$ sur $]0,\pi[+\pi\mathbb{Z}$. **2.** $x\longmapsto 2\operatorname{Arctan}(\mathrm{e}^x)$ sur $\mathbb{R}$ et $x\longmapsto\ln\left|\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\right|$ sur $\mathbb{R}^*$.

3. $x\longmapsto\dfrac{x}{5}(\cos(2\ln x)+2\sin(2\ln x))$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 30. **1.** La primitive F sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 est définie, pour tout $n\in\mathbb{Z}$, par $F|_{](2n-1)\pi,(2n+1)\pi[}\colon t\longmapsto\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\tan\dfrac{t}{2}\right)+\dfrac{2n\pi}{\sqrt{3}}$. **2.** $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$.