

3 | Ensembles et applications

Cahier de calcul : \emptyset .

Banque CCINP : \emptyset .

Ensembles

Exercice 1 ••○○

Exhiber des exemples pour illustrer les deux affirmations suivantes.

1. Sous l'hypothèse $A \cup B = A \cup C$, on ne peut pas conclure que $B = C$.
2. Sous l'hypothèse $A \cap B = A \cap C$, on ne peut pas conclure que $B = C$.

Exercice 2 ••○○

Soit A, B, C trois parties d'un ensemble E . Simplifier les expressions suivantes.

1. $A \cap (\bar{A} \cup B)$.
2. $A \cup (\bar{A} \cap B)$.
3. $A \cap (\bar{A} \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup C)$.
4. $A \cup (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$.

Exercice 3 ••○○

Démontrer les affirmations suivantes, où X, Y et Z désignent des sous-ensembles d'un ensemble E .

1. Si $X \subset Y$ et $Y \subset Z$, alors $X \subset Z$. (*transitivité de l'inclusion*)
2. $X \subset Y \iff \bar{Y} \subset \bar{X}$.
3. Si $X \subset Y$, alors $X \cap Z \subset Y \cap Z$ et $X \cup Z \subset Y \cup Z$.
4. $X = (X \cap Y) \cup (X \setminus Y)$.
5. $(X \cap Y) \cap (X \cap Z) = X \cap Y \cap Z$.

Exercice 4 ••○○

Soit A et B deux ensembles. Établir les équivalences :

$$A \subset B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A.$$

Exercice 5 ••○○

Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E .

1. Que valent $A \setminus \emptyset$, $A \setminus A$ et \bar{A} ?
2. Montrer que $A \setminus B = A \iff B \setminus A = B$.
3. Montrer que $(A \setminus B) \setminus B = A \setminus B$.
4. Montrer que $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.
5. Montrer que $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
6. Montrer que $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$.

Exercice 6 ••○○

Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E . Montrer que

1. $(\bar{A} \cap \bar{B}) \setminus C = (\bar{C} \setminus B) \cup (\bar{A} \setminus C)$.
2. $A \cup B = B \cap C \implies A \subset B \subset C$.
3. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
4. $A \cap B = A \cup B \iff A = B$.

Exercice 7 ••○○

Expliciter les ensembles suivants

1. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right]$.
2. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right]$.

Exercice 8 ••○○

Étudier les inclusions $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ et $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, où

$$\mathcal{A} = \left\{ \frac{\varepsilon}{k(k+1)} \right\}_{\substack{k \in \mathbb{N}^* \\ \varepsilon \in \{-1, 1\}}}$$
 et $\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right\}_{m, n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 9 ••○○

Décrire géométriquement l'ensemble

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}.$$

Montrer qu'il ne s'agit pas du produit cartésien de deux parties de \mathbb{R} .

Exercice 10 ••○○

Soit E un ensemble et A et B deux parties de E . Résoudre les équations suivantes, d'inconnue X une partie de E ,

1. $A \cup X = B$.
2. $A \cap X = B$.

Exercice 11 ••○○

On note $E = \{1\}$ et $F = \{1, \pi\}$.

1. Détaillez $\mathcal{P}(E)$, $\mathcal{P}(F)$ puis $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.
2. Est-ce que l'un de ces ensembles est inclus dans l'autre ?

Exercice 12 ••○○

Soit $E = \{0, 1, \{0\}, \{0, 1\}\}$. Parmi les propositions suivantes, dites lesquelles sont vraies.

1. $\{0\} \in E$.
2. $\{0\} \in \mathcal{P}(E)$.
3. $\{\{1\}\} \subset E$.
4. $\{0, 1\} \subset E$.
5. $\{\{0\}, 0\} \subset \mathcal{P}(E)$.
6. $\{\{0\}, \emptyset\} \in \mathcal{P}(E)$.
7. $\{\{1, \{0, 1\}\}, \{0\}, E\} \subset \mathcal{P}(E)$.
8. $\{\{\{0, 1\}\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.

Exercice 13 ••○○ — Soit A une partie d'un ensemble E . Démontrer que

1. $(\forall X \in \mathcal{P}(E), A \cup X = E) \implies A = E$.
2. $(\forall X \in \mathcal{P}(E), A \cap X = \emptyset) \implies A = \emptyset$.

Exercice 14 ••○○ — Soit A et B deux ensembles.

1. Démontrer que $A \subset B$ si et seulement si $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.
2. Que pensez-vous des égalités suivantes ?
 - a. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
 - b. $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

Si l'égalité est fausse, peut-on la remplacer par une inclusion ?

Exercice 15 ••○○ —

Soit E un ensemble, $n \in \mathbb{N}^*$ et A_0, A_1, \dots, A_n des sous-ensembles de E tels que

$$\emptyset = A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq \dots \subsetneq A_n = E.$$

On pose, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$. Montrer que (B_1, \dots, B_n) est une partition de E .

Exercice 16 ••○○ — Fonctions indicatrices

Soit E un ensemble et A, B et A_1, \dots, A_n des parties de E .

1. Caractériser à l'aide des fonctions indicatrices les propriétés ensemblistes suivantes :
 - a. $A \subset B$.
 - b. A et B sont disjoints.
 - c. $\{A_1, \dots, A_n\}$ est une partition de E .
2. Retrouver à l'aide des fonctions indicatrices :
 - a. les propriétés de commutativité, d'associativité et de distributivité de l'union et de l'intersection ;
 - b. l'équivalence $A \cap B = A \cup B \iff A = B$.

Applications définies explicitement

Exercice 17 ••○○ — Soit f l'application de \mathbb{R}^* dans \mathbb{R} définie, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, par $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'image directe de A et l'image réciproque de B par l'application f .

1. $A =]-1, 0[\cup]0, 1[$ et $B =]-1, 1]$.
2. $A = B =]-\infty, 0[$.
3. $A = \mathbb{Z}^*$ et $B =]0, 1[$.

Exercice 18 ••○○ — Soit f l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{R} qui, à tout complexe z , associe son module. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'image directe de A et l'image réciproque de B par l'application f .

1. $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists x \in \mathbb{R}, z = x + 2i\}$ et $B = [-1, 1]$.
2. $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists x \in [0, 1], z = \sqrt{x} + i\sqrt{1-x}\}$ et $B =]0, 1]$.
3. $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists x \in \mathbb{R}, z = (1 + \cos x) + i \sin x\}$ et $B = [1, 2]$.

Exercice 19 ••○○ — Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

- a. Soit $y \in \mathbb{R}$. Déterminer le nombre d'antécédents de y .
- b. L'application f est-elle bijective ?
- c. Montrer que : $\forall x \in [-1, 1], f(x) \in [-1, 1]$.
L'application $g : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ induite par f est-elle bijective ?

Exercice 20 ••○○ —

Soit les fonctions f définies ci-dessous. Montrer que f est une bijection entre des sous-ensembles de \mathbb{R} que l'on précisera et déterminer sa fonction réciproque.

1. $f(x) = \frac{2+x}{3-x}$.
2. $f(x) = \frac{1-3x}{4+5x}$.
3. $f(x) = \frac{x}{1-x}$.

Exercice 21 ••○○ —

1. Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

- a. $(x, y) \mapsto 2y$ de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .
- b. $(x, y) \mapsto (1, x - y, y)$ de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^3 .
- c. $(x, y) \mapsto (2x+y, 3x-2y)$ de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 .
- d. $(x, y) \mapsto (2x+y, x^2+y)$ de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 .

2. (•••) Entre quelles sous-ensembles maximaux de \mathbb{R}^2 l'application de la question 1.d induit-elle une bijection ?

Exercice 22 ••○○ —

On note f l'application $n \mapsto 2n$ de \mathbb{N} dans \mathbb{N} et g l'application de \mathbb{N} dans \mathbb{N} définie par

$$g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Étudier l'injectivité et la surjectivité de f et g . Que vaut $g \circ f$? Que faut-il retenir ?

Applications abstraites

Exercice 23 ••○○ Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

- Soit $(B_j)_{j \in J}$ une famille de parties de F . Montrer que

$$f^{-1}\left[\bigcup_{j \in J} B_j\right] = \bigcup_{j \in J} f^{-1}[B_j] \quad \text{et} \quad f^{-1}\left[\bigcap_{j \in J} B_j\right] = \bigcap_{j \in J} f^{-1}[B_j]$$

- Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E . Montrer que

$$f\left[\bigcup_{i \in I} A_i\right] = \bigcup_{i \in I} f[A_i] \quad \text{et} \quad f\left[\bigcap_{i \in I} A_i\right] \subset \bigcap_{i \in I} f[A_i]$$

- Proposer un exemple pour lequel l'inclusion précédente est stricte.
- Montrer que cette inclusion est une égalité lorsque f est supposée injective.

Exercice 24 •○○○

Soit E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$ deux applications.

On suppose $f \circ g \circ f$ bijective. Montrer que f et g le sont aussi.

Exercice 25 •○○○ Soit E un ensemble et $f : E \rightarrow E$ une application.

On suppose que $f \circ f = f$ et que f est injective ou surjective. Montrer que $f = \text{Id}_E$.

Exercice 26 •○○○ Soit E , F et G trois ensembles. Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : E \rightarrow G$ des applications. Considérons l'application

$$h : E \rightarrow F \times G, x \mapsto (f(x), g(x)).$$

- Montrer que si f ou g sont injectives, alors h aussi. La réciproque est-elle vraie ?
- Montrer que si h est surjective, alors f et g aussi. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 27 •○○○ Soit E un ensemble non vide, $A, B \in \mathcal{P}(E)$ et f l'application définie par

$$f : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & (X \cup A, X \cup B). \end{array}$$

- Montrer que f n'est pas surjective.
- Montrer que f est injective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

Exercice 28 ••○○ **Caractérisations injectivité/surjectivité**

Soit E et F deux ensembles et $f \in F^E$.

- a. On suppose E NON VIDE. Montrer que f est injective si et seulement si f admet un *inverse à gauche*, i.e. il existe $g \in E^F$ tel que $g \circ f = \text{Id}_E$.
- b. Montrer que f est surjective si et seulement si f admet un *inverse à droite*, i.e. il existe $g \in E^F$ tel que $f \circ g = \text{Id}_F$.
- a. On suppose E NON VIDE. Montrer que f est injective si et seulement si f est *simplifiable à gauche*, i.e.

$$\forall H, \quad \forall h, h' \in E^H, \quad f \circ h = f \circ h' \implies h = h'.$$

- b. Montrer que f est surjective si et seulement si f est *simplifiable à droite*, i.e.

$$\forall H, \quad \forall h, h' \in H^F, \quad h \circ f = h' \circ f \implies h = h'.$$

Exercice 29 ••○○ **Caractérisations injectivité/surjectivité (bis)**

Soit E et F deux ensembles et $f \in F^E$.

- a. Pour une partie A de E , comparer A et $f^{-1}[f[A]]$. Faire un dessin !
- b. Pour une partie B de F , comparer B et $f[f^{-1}[B]]$. Faire un dessin !
- Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
 - f est injective ;
 - $\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad f^{-1}[f[A]] = A$;
 - $\forall A, A' \in \mathcal{P}(E), \quad f[A \cap A'] = f[A] \cap f[A']$;
 - $\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad f[\complement_E A] \subset \complement_F f[A]$.

3. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- f est surjective ;
- $\forall B \in \mathcal{P}(F), \quad f[f^{-1}[B]] = B$;
- $\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad f[\complement_E A] \supset \complement_F f[A]$.

- Montrer que f est bijective si et seulement si

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad f[\complement_E A] = \complement_F f[A].$$

Exercice 30 •○○○

- Si une application est injective sur deux parties de son ensemble de définition, l'est-elle sur leur réunion ?
- Soit $f : E \rightarrow F$ une application et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de E , croissante pour l'inclusion et telle que $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Montrer que si $f|_{A_n}$ est injective, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f l'est sur E .

Exercice 31 Soit f et g deux bijections de \mathbb{Z} sur \mathbb{Z} . Montrer que l'application fg n'est pas une bijection de \mathbb{Z} sur \mathbb{Z} .

Exercice 32

- Soit E un ensemble et $f : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ une application. Montrer que f n'est pas surjective. On pourra considérer l'ensemble $\{x \in E \mid x \notin f(x)\}$.
- En déduire que l'on ne peut pas considérer « l'ensemble de tous les ensembles ».

Exercice 33 Mines-Ponts MP 2022

Soit $E = \{1, \dots, n\}$ et $\mathcal{F} = \mathcal{P}(E)$. Montrer qu'il existe une unique bijection g de \mathcal{F} dans \mathcal{F} telle que $g(F) \cap F = \emptyset$, pour tout $F \in \mathcal{F}$.

Il y en a pas d'autre !

Exercice 33. Clairement l'inversion $A \mapsto \overline{A}$ de \mathcal{F} convient. Il suffit donc de montrer qu'il est notamment bijective.

Exercice 22. f est injective et non subjective, g est subjective et non injective et $g \circ f = \text{Id}_{\mathcal{F}}$ est bijective. **1.d.** Non injective et non subjective. **1.b.** Injective et non subjective.

Exercice 21. **1.a.** Surjective et non injective. **1.b.** Injective et non subjective.

3. La réciproque est $x \mapsto \frac{x}{x+1}$.

Exercice 20. **1.** La réciproque est $x \mapsto \frac{3x-2}{x+1}$. **2.** La réciproque est $x \mapsto \frac{5x+3}{1-4x}$.

Exercice 19. **a.** $\text{Card } f^{-1}[\{y\}] = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 < |y| < 1 \\ 1 & \text{si } y \in \{0, \pm 1\} \\ 0 & \text{si } |y| > 1 \end{cases}$. **b.** Non. **c.** Oui.

2. $f[A] = \{1\}$ et $f^{-1}[B] = \underline{D}(0, 1) \setminus \{0\}$. **3.** $f[A] = [0, 2]$ et $f^{-1}[B] = \underline{D}(0, 2) \setminus D(0, 1)$.

Exercice 18. **1.** $f[A] = [2, +\infty[$ et $f^{-1}[B] = \underline{D}(0, 1)$.
2. $f[A] = [0, +\infty[$ et $f^{-1}[B] = \emptyset$.

Exercice 17. **1.** $f[A] = [-1, +\infty[$ et $f^{-1}[B] = [-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

Exercice 16. **1.a.** $\prod A_i \leq \prod B_i$. **1.b.** $\prod A_i \prod B_i = 0$. **1.a** ($A_i \in [1, n]$, $\prod A_i \neq 0$) et $\prod_{i=1}^n \prod A_i = 1$.
 général.

Exercice 14. **2.a.** Vrai. **2.b.** Seule l'inclusion $\mathcal{O}(A) \cup \mathcal{O}(B) \subset \mathcal{O}(A \cup B)$ est vraie en b. $\mathcal{O}(E) \subset \mathcal{O}(F)$, dans la mesure où $E \subset F$!

Exercice 12. **1.** Vrai. **2.** Vrai. **3.** Faux. **4.** Vrai. **5.** Faux. **6.** Faux. **7.** Vrai. **8.** Vrai.
 $\mathcal{O}(E) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \{\{1, 2\}\}, \{1, 2\}\}$ et au complémentaire !

Exercice 11. **a.** $\mathcal{O}(E) = \{\emptyset, \{1\}\}$, $\mathcal{O}(F) = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$ et au complémentaire !

Remarque : la résolution d'une des équations se déduit de celle de l'autre par passage à l'opposé.

2. L'ensemble des solutions est $\begin{cases} \{X \in \mathcal{O}(E) \mid B \subset X \subset \overline{A}\} & \text{si } B \subset A \\ \emptyset & \text{si } B \not\subset A \end{cases}$.

Exercice 10. **1.** L'ensemble des solutions est $\begin{cases} \{X \in \mathcal{O}(E) \mid B \setminus A \subset X \subset B\} & \text{si } A \subset B \\ \emptyset & \text{si } A \not\subset B \end{cases}$.

Exercice 8. $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}$ et $\mathcal{O} \neq \mathcal{O}$, puisque $\frac{e}{e+1} = \frac{e}{e} - \frac{e}{e+1}$ et $0 \in \mathcal{O}$.

Exercice 7. **1.** $[-1, 1]$. **2.** $[-1, 1]$.

Exercice 31. Raisonner par l'absurde et considérer des antécédents de 1 et -1 par fg .

Exercice 10. Procéder par analyse-synthèse et faire des dessins.

Indications