2 Logique et raisonnements

Cahier de calcul : $\varnothing$. **Banque CCINP :** $\varnothing$.

Connecteurs et quantificateurs

Exercice 1 ●○○○ — Propriétés des connecteurs « ou » et « et »

Démontrer les équivalences logiques suivantes.

1. Commutativité :
   a. p ou $q \equiv q$ ou p. **b.** p et $q \equiv q$ et p.
2. Associativité :
   a. $(p$ ou $q)$ ou $r \equiv p$ ou $(q$ ou $r)$. **b.** $(p$ et $q)$ et $r \equiv p$ et $(q$ et $r)$.
3. Distributivité :
   a. p ou $(q$ et $r) \equiv (p$ ou $q)$ et $(p$ ou $r)$. **b.** p et $(q$ ou $r) \equiv (p$ et $q)$ ou $(p$ et $r)$.

Exercice 2 ●○○○ — Nier les assertions suivantes.

1. $((p \text{ ou } q) \implies r) \implies (s \text{ et } t)$. **2.** $(p \implies r) \iff (p \implies (\text{non } r))$.

Exercice 3 ●●○○ — Quelques tautologies

Montrer que les formules suivantes sont des tautologies.

1. p ou (non p) (*principe du tiers exclus*).
2. $(p \text{ et } (p \implies q)) \implies q$ (*modus ponens*).
3. $((p \implies q) \text{ et } (q \implies r)) \implies (p \implies r)$ (*transitivité de* $\implies$).

Exercice 4 ●○○○ — Comparer les couples de propositions suivants.

1. $\forall x\,(\mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{Q}(x))$ et $(\forall x\,\mathcal{P}(x))$ et $(\forall x\,\mathcal{Q}(x))$.
2. $\forall x\,(\mathcal{P}(x) \text{ ou } \mathcal{Q}(x))$ et $(\forall x\,\mathcal{P}(x))$ ou $(\forall x\,\mathcal{Q}(x))$.
3. $\exists x\,(\mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{Q}(x))$ et $(\exists x\,\mathcal{P}(x))$ et $(\exists x\,\mathcal{Q}(x))$.
4. $\exists x\,(\mathcal{P}(x) \text{ ou } \mathcal{Q}(x))$ et $(\exists x\,\mathcal{P}(x))$ ou $(\exists x\,\mathcal{Q}(x))$.
5. $\forall x\,(\mathcal{P}(x) \implies \mathcal{Q}(x))$ et $(\forall x\,\mathcal{P}(x)) \implies (\forall x\,\mathcal{Q}(x))$.

Exercice 5 ●●○○ — Nier les assertions suivantes

1. $\forall x \in A, \quad \exists y \in B, \quad (\mathcal{P}(y) \implies \mathcal{Q}(x,y))$.
2. $\forall x \in A, \quad ((\exists y \in B, \quad \mathcal{P}(y)) \implies \mathcal{Q}(x,y))$.
3. $(\exists x \in E, \quad \mathcal{P}(x)) \implies (\forall x \in E, \quad \mathcal{P}(x))$.
4. $\exists! x \in E, \quad \mathcal{P}(x)$.

Exercice 6 ●○○○

Traduire les propositions suivantes à l'aide de symboles mathématiques.

1. Pour que p soit vraie, il faut que q le soit.
2. Pour que p soit vraie, il suffit que q le soit.
3. La proposition q est une condition suffisante de la proposition p.
4. Pour qu'un réel x soit positif, il suffit qu'il ne soit pas négatif.

Exercice 7 ●○○○ — Traduire dans un français éclairant les propositions suivantes, puis déterminer, sans justifier, leur valeur de vérité.

a. « $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad n \leqslant N$ ». **b.** « $\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \leqslant N$ ».
c. « $\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists x \in \mathbb{R}, \quad y = e^x$ ». **d.** « $\exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad y = e^x$ ».

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

e. « $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R}, \quad y = f(x)$ ». **f.** « $\exists y \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y = f(x)$ ».

Exercice 8 ●○○○

Traduire avec des quantificateurs les phrases suivantes.

1. L'entier 5 est impair.
2. La fonction sinus est à valeurs dans $[-1\,,1]$.
3. Tout nombre complexe égal à son conjugué est un nombre réel.
4. L'équation $\ln x - x + 1 = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$.
5. L'exponentielle de tout réel est strictement positive.
6. La fonction polynomiale $P : x \longmapsto x^2 + x + 1$ n'admet pas de racine réel.

Exercice 9 ●○○○ — Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Écrire avec des quantificateurs les propositions suivantes, puis leur négation.

1. f est croissante.
2. f prend des valeurs aussi grandes que l'on veut.
3. f possède un minimum.
4. f est constante.
5. f est la fonction nulle.
6. f s'annule.
7. f s'annule au plus une fois.

Raisonnements par l'absurde/contraposée/disjonction

Exercice 10 ●●○○ En s'aidant du nombre $\sqrt{2}$, montrer l'assertion

$$\exists x, y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \quad x^y \in \mathbb{Q}.$$

Exercice 11 ●●○○

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $n^2 - n$ est pair.
2. Soit a et n deux entiers supérieurs ou égaux à 2. Montrer les assertions suivantes.
   - **a.** Si $a^n + 1$ est premier, alors n est pair.
   - **b.** Si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$ et n est premier.

Exercice 12 ●●○○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_{n+1} \in [0\,,1]$. Montrer qu'il existe $(i, j) \in [\![1\,, n+1]\!]^2$ tel que $i \neq j$ et $|x_i - x_j| \leqslant \frac{1}{n}$.

Exercice 13 ●●○○ Montrer que le réel $\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel.

Analyse-Synthèse

Exercice 14 ●●○○

Montrer que toute fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une fonction affine et d'une fonction s'annulant en -1 et 1.

Exercice 15 ●●●○

1. Montrer que toute fonction continue $f : [0\,,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ s'écrit sous la forme $f = g + c$, où $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et $c \in \mathbb{R}$. Cette décomposition est-elle unique ?
2. Montrer que toute fonction continue $f : [0\,,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ s'écrit sous la forme $f = g + h$, où $h : x \longmapsto ax + b$ est une fonction affine et où, pour toute fonction affine p, $\displaystyle\int_0^1 p(t)g(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Cette décomposition est-elle unique ? Le cas échéant, exprimer a, b et g en fonction de f.

Exercice 16 ●●○○ Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| = |x - y|.$$

Exercice 17 ●●●○ **D'après Rallye mathématiques d'Alsace 2012**

1. Mon code secret de téléphone portable est composé de quatre chiffres distincts et non nuls. Quand j'effectue la somme de tous les nombres possibles formés avec deux de ces quatre chiffres, j'obtiens à nouveau mon code. Quel est-il ?
2. Oups, je me suis trompé, il faut encore multiplier le résultat par 7 pour obtenir mon code. Quel est-il ?

Récurrence

Exercice 18 ●○○○ Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 3, \\ u_{n+1} = (u_n)^2, \text{ pour tout } n \geqslant 0. \end{cases}$$

Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^{2^n}$.

Exercice 19 ●○○○ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}, \text{ pour tout } n \geqslant 0. \end{cases}$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 4$.

Exercice 20 ●○○○ Montrer l'assertion suivante

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, \quad 2^n > n^2.$$

Exercice 21 ●○○○ Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{n+1} = 3u_n - 1, \text{ pour tout } n \geqslant 0 \end{cases}$$

Que pensez-vous du raisonnement suivant ?

« Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \leqslant u_{n+1}$ On a alors

$$u_n \leqslant u_{n+1} \implies 3u_n - 1 \leqslant 3u_{n+1} - 1 \implies u_{n+1} \leqslant u_{n+2}.$$

Ainsi, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$ et la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante. »

Exercice 22 ●●○○

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$\begin{cases} u_1 = 0, \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n}, \text{ pour tout } n \geqslant 1. \end{cases}$$

1. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.
2. Démontrer cette conjecture.

Exercice 23 ●●○○ Suite de Fibonacci

On considère la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n. \end{cases}$

Démontrer que, pour tout entier naturel n, $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.

Exercice 24 ●●○○

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + \dfrac{a_n}{n+1}, \text{ pour tout } n \geqslant 0. \end{cases}$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant a_n \leqslant n^2$.

Exercice 25 ●●○○

Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe des entiers p et q tels que $n = 2^p(2q+1)$.

Exercice 26 ●●○○

Soit f une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \geqslant n$.

Exercice 27 ●●●○ Décomposition égyptienne de 1

Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$, il existe des entiers $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ tels que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = 1.$$

Exercice 28 ●●●○ D'après Rallye mathématique d'Alsace

On considère l'entier naturel ayant 3^{2025} chiffres tous égaux à 1. Montrer qu'il est divisible par 3^{2025} mais pas par 3^{2026}.

Indications

Exercice 1. Dresser les tables de vérité.

Exercice 5. **4.** Écrire le quantificateur $\exists!$ à l'aide des quantificateurs $\forall$ et $\exists$.

Exercice 10. Procéder par disjonction de cas.

Exercice 11. **1.** Procéder par disjonction de cas. **2.** Contraposer.

Exercice 12. Raisonner par l'absurde.

Exercice 13. Raisonner par l'absurde.

Exercice 27. Pour l'hérédité, on pourra commencer par décomposer $\frac{1}{n(n+1)}$ en une somme de deux fractions.

Exercice 28. Traiter par récurrence le cas général 3^n. Si l'on note u_n l'entier formé de 3^n chiffres 1, quel est le lien entre u_n et u_{n+1} ?

Éléments de réponses

Exercice 2. **2.a.** $((p \text{ ou } q) \Longrightarrow r)$ et $((\text{non } s) \text{ ou } (\text{non } t))$. **2.b.** p.

Exercice 4. **1.** Identiques. **2.** Distinctes. **3.** Distinctes. **4.** Identiques. **5.** Distinctes.

Exercice 5. **1.** $\exists x \in A, \quad \forall y \in B, \quad (\mathcal{P}(y) \text{ et } (\text{non } \mathcal{Q}(x,y)))$.
2. $\exists x \in A, \quad ((\exists y \in B, \quad \mathcal{P}(y)) \text{ et } (\text{non } \mathcal{Q}(x,y)))$.
3. $(\exists x \in E, \quad \mathcal{P}(x))$ et $(\exists x \in E, \quad (\text{non } \mathcal{P}(x)))$.
4. « $\exists! x \in E, \quad \mathcal{P}(x)$ » $\equiv$ « $(\exists x \in E, \quad \mathcal{P}(x))$ et $(\forall x, y \in E, \quad (\mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{P}(y)) \Longrightarrow x = y)$ » dont la négation est « $(\forall x \in E, \quad \text{non } \mathcal{P}(x))$ ou $(\exists x, y \in E, \quad (\mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{P}(y)) \text{ et } (x \neq y))$ ».

Exercice 6. **1.** $p \Longrightarrow q$. **2.** $q \Longrightarrow p$. **3.** $q \Longrightarrow p$. **4.** $(\text{non } (x \leqslant 0)) \Longrightarrow x \geqslant 0$.

Exercice 8. **1.** $\exists k \in \mathbb{Z}, \quad 5 = 2k+1$. **2.** $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in [-1\,,1], \quad \sin x = y$.
3. $\forall z \in \mathbb{C}, \quad \overline{z} = z \Longrightarrow z \in \mathbb{R}$. **4.** $\exists! x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln x - x + 1 = 0$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x > 0$. **6.** $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + x + 1 \neq 0$.

Exercice 9. **1.** $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$. **2.** $\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geqslant M$.
3. $\exists a \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geqslant f(a)$. **4.** $\exists c \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = c$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 0$. **6.** $\exists x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 0$.
7. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (f(x) = 0 \text{ et } f(y) = 0) \Longrightarrow x = y$.

Exercice 16. $x \longmapsto x + b$ et $x \longmapsto -x + b$, avec $b \in \mathbb{R}$.

Exercice 17. **1.** Impossible. **2.** 4158.