

Espaces vectoriels de dimension finie

Cahier de calcul : $\emptyset$.

Banque CCINP : exercices 12, 26, 27 et 30.

— Exercice 1 •••• — ✓ Vrai ou faux ?

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

1. Une famille de $n + 1$ vecteurs de E est génératrice.
2. Une famille de $n - 1$ vecteurs de E est libre.
3. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de dimension finie.
4. La somme de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de dimension finie.
5. L'union de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de dimension finie.

Bases et dimension

— Exercice 2 •••• —

1. Montrer que la famille $((8, 4, 1, 2), (1, 3, 0, 5))$ est libre et la compléter en une base de l'espace $\mathbb{R}^4$.
2. Montrer que la famille $(X^3 + X + 1, X^3 - 2X + 2, X^2 + 3X)$ est libre et la compléter en une base de $\mathbb{R}_4[X]$.
3. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3 et (e_1, e_2, e_3) une base de E . On pose $\varepsilon_1 = e_1 + 2e_2 + e_3$ et $\varepsilon_2 = e_2 - e_3$. Montrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est libre et la compléter en une base de E .

— Exercice 3 •••• — ✓ Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels de dimension finie. On précisera leur dimension et une base.

1. $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a \cos(2x) + b \cos x + c\}$.
2. L'ensemble des suites réelles arithmétiques.
3. $F_\alpha = \{x \mapsto P(x) e^{\alpha x} + Q(x) e^{-\alpha x} \mid P, Q \in \mathbb{R}_n[X]\}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
4. $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

— Exercice 4 •••• — ✓

On note E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont la somme des coefficients de la première colonne est égale à la somme des coefficients de la seconde colonne. Montrer que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, et en déterminer une base et la dimension.

— Exercice 5 •••• — ✓ Montrer que l'ensemble

$$\{x \mapsto A \sin(x + \varphi) \mid A, \varphi \in \mathbb{R}\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.

— Exercice 6 •••• — Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille

$$(1 + X, X + X^2, \dots, X^{n-1} + X^n, X^n)$$

est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

— Exercice 7 •••• — ✓ Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la famille $((X - a)^k)_{0 \leq k \leq n}$ constitue une base de l'espace $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Donner, pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, les coordonnées de X^p dans cette base.

— Exercice 8 •••• — Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Déterminer un entier $d \in \mathbb{N}^*$ pour lequel la famille $(I_n, M, M^2, \dots, M^{d-1})$ est liée.
2. En déduire que M possède un polynôme annulateur non nul.

— Exercice 9 •••• — ? Dimension sur $\mathbb{R}$ vs dimension sur $\mathbb{C}$

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie. On note $\dim_{\mathbb{C}} E$ (resp. $\dim_{\mathbb{R}} E$) la dimension de E comme $\mathbb{C}$ -espace vectoriel (resp. $\mathbb{R}$ -espace vectoriel).

1. Déterminer $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2$ et $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2$.
2. Plus généralement, montrer que, pour tout $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E de dimension finie,

$$\dim_{\mathbb{R}} E = 2 \dim_{\mathbb{C}} E.$$

— Exercice 10 •••• — Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$.

1. Montrer que l'application $P \mapsto (P(0), P')$ réalise un isomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ sur $\mathbb{K} \times \mathbb{K}[X]$.
2. En déduire une preuve du fait que $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

— Exercice 11 ●●○○ — Suites récurrente linéaire homogène d'ordre 2

Le but de cet exercice est de donner une preuve alternative du théorème 72 du chapitre 15. Il est donc exclu d'utiliser ce théorème dans cet exercice. Fixons $a, b, c \in \mathbb{C}$, avec $ac \neq 0$, et

$$E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, \quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0\}.$$

1. Montrer que E est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.
2. Montrer que $\varphi : (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1)$ est un isomorphisme de E sur $\mathbb{C}^2$.
3.
 - a. Si r est une racine de $aX^2 + bX + c$, montrer que $(r^n) \in E$.
 - b. Si r est une racine double de $aX^2 + bX + c$, montrer que $(nr^n) \in E$.
4. Retrouver les résultats du théorème 72 du chapitre 15.

— Exercice 12 ●●○○ — Banque d'exercices CCINP 2025 (55)

Soit a un nombre complexe. On note E l'ensemble des suites complexes telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia - 1)u_n \quad \text{avec } (u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2.$$

1.
 - a. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites complexes.
 - b. Déterminer, en le justifiant, la dimension de E .
2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$. Exprimer, pour tout entier naturel n , le nombre complexe u_n en fonction de n .
Indication : discuter suivant les valeurs de a .

— Exercice 13 ●●○○ — Sous-corps engendré par un élément algébrique

Soit $\mathbb{L}$ un corps, $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{L}$ et $a \in \mathbb{L} \setminus \mathbb{K}$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul tel que $P(a) = 0$ (l'élément a de $\mathbb{L}$ est dit *algébrique sur $\mathbb{K}$*).

1. Montrer que $\mathbb{K}(a) = \text{Vect}_{\mathbb{K}}(a^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.
2. Montrer que $\mathbb{K}(a)$ est un corps.

— Exercice 14 ●●○○ — Mines-Ponts MP 2022

On veut déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ satisfaisant la relation

$$(\star) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{2i\pi P(n)} = 1.$$

On pose $B_0 = 1$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $B_k = \frac{X(X-1) \cdots (X-k+1)}{k!}$.

1. Soit P vérifiant $(\star)$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) \in \mathbb{Z}$.
2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(B_0, \dots, B_N)$ est une base de $\mathbb{R}_N[X]$.
3. Montrer que $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $(\star)$ si et seulement si P est une combinaison linéaire à coefficients entiers des B_k .

— Exercice 15 ●●○○ — ENS SR 2022

Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On définit la suite $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ par

$$P_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P_k = \frac{1}{k!} \prod_{\ell=0}^{k-1} (X - (a + \ell)).$$

1.
 - a. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.
 - b. Montrer que, pour tous $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $i \in \mathbb{Z}$, $P_k(i) \in \mathbb{Z}$.
2. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$ un polynôme prenant des valeurs entières en $n+1$ entiers consécutifs. Montrer que $P(i) \in \mathbb{Z}$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$.
3. Le résultat précédent est-il préservé si les $n+1$ entiers ne sont plus supposés consécutifs?
4. Caractériser les polynômes P tels que $P[\mathbb{Z}] \subset \mathbb{Z}$.

— Exercice 16 ●●○○ — Mines-Ponts MP 2022

Soit E un espace vectoriel muni d'une base $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On note u l'endomorphisme de E vérifiant $u(e_n) = e_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on pose

$$\Phi : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E), v \longmapsto u \circ v - v \circ u.$$

1. Montrer que Φ n'est pas injectif.
2. Montrer que $\text{Ker } \Phi$ est de dimension infinie.
3. Montrer que, pour tous $x_0 \in E$ et $w \in \mathcal{L}(E)$, il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\Phi(v) = w$ et $v(e_0) = x_0$.

Somme de sous-espaces vectoriels

— Exercice 17 ●○○○ —

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On suppose $\dim F + \dim G > \dim E$. Montrer que F et G ont au moins un vecteur non nul en commun.

— Exercice 18 ●○○○ —

On pose $a = (0, 0, 1, 0)$, $b = (1, 1, 0, -1)$, $u = (1, 0, 1, 0)$, $v = (0, 1, -1, 0)$ et $w = (1, 1, 1, 1)$, ainsi que $F = \text{Vect}(a, b)$ et $G = \text{Vect}(u, v, w)$. Déterminer les dimensions des sous-espaces F , G , $F + G$ et $F \cap G$.

— Exercice 19 ●○○○ —

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et F l'ensemble des matrices de E de trace nulle.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
2. Montrer que $E = F \oplus \text{Vect}(I_n)$.
3. En déduire la dimension de F .

Exercice 20 ●●○○ — ?

Déterminer un supplémentaire des sous-espaces vectoriels suivants :

1. $\text{Vect}((1, 2, 1, 1), (2, 2, 1, 1), (0, 2, 1, 1))$ dans $\mathbb{R}^4$.
2. $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + 2z - t = 0 \text{ et } y - z + t = 0\}$ dans $\mathbb{R}^4$.
3. $\{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(-X) = P\}$ dans $\mathbb{R}_4[X]$.
4. a. $\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P'(0) = 0\}$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.
b. $\{f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
5. $\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P' + 3P = P(0)X^3 + P(1)X + P(1)\}$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 21 ●●○○ — On note E l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} + 2u_n,$$

F l'ensemble des suites géométriques de raison 2 et G l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+2} = -b_{n+1} - b_n$.

1. Montrer que E , F et G sont des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels.
2. Déterminer une base et la dimension de F et de G respectivement.
3. Déterminer la dimension de E et en déduire que $E = F \oplus G$. Donner alors une base explicite de E .
4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de E définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $u_2 = 2$. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice 22 ●●○○ — ? **Supplémentaire commun**

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n , F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension. Montrer qu'il existe un sous-espace G de E supplémentaire à la fois de F_1 et F_2 dans E .

Rang

Exercice 23 ●○○○ — Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ des vecteurs de E . On suppose que les vecteurs $x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n$ sont linéairement indépendants. Montrer l'inégalité $\text{rg}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \geq n$.

Exercice 24 ●●○○ — ?

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E de rang s . On suppose qu'il existe une sous-famille $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ à r éléments, avec $r < n$, de rang s' . Montrer que $s' \geq r + s - n$.

Exercice 25 ●●○○ — ? Déterminer le rang des familles suivantes

1. $((1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (-1, -1, 1, 0), (0, 0, 2, 0))$ dans $\mathbb{R}^4$;
2. $(X^2 + X + 1, X^2 + 3X + 1, 2X, X^3 + 3)$ dans $\mathbb{C}[X]$;
3. $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$, où

$$\begin{aligned} \varphi_1 : (x, y, z, t) &\longmapsto x + z, & \varphi_2 : (x, y, z, t) &\longmapsto -x + 2y, \\ \varphi_3 : (x, y, z, t) &\longmapsto x + y - z + t, & \varphi_4 : (x, y, z, t) &\longmapsto y + t. \end{aligned}$$

Exercice 26 ●○○○ — **Banque d'exercices CCINP 2025 (60)**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\text{Ker } f$.
2. L'endomorphisme f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\text{Im } f$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$?

Exercice 27 ●○○○ — **Banque d'exercices CCINP 2025 (90)**

Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.

1. Montrer que l'application Φ suivante est un isomorphisme d'espaces vectoriels :

$$\Phi : \begin{vmatrix} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ P & \longmapsto & (P(a_1), P(a_2), P(a_3)) \end{vmatrix}$$

2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose

$$\forall k \in \{1, 2, 3\}, \quad L_k = \Phi^{-1}(e_k).$$

- a. Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
 - b. Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3 .
3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3) .
 4. *Application.* On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0, 1), B(1, 3), C(2, 1)$. Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C .

Exercice 28 ●●○○ — Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$.

On note $\mathbb{K}[A] = \{P(A) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ l'ensemble des polynômes en A .

1. Montrer que $\mathbb{K}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que A^{-1} est un polynôme en A en étudiant l'application $M \longmapsto AM$ définie sur $\mathbb{K}[A]$.

— **Exercice 29** ●●○○ —  Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$. On note Δ l'endomorphisme $P \mapsto P(X+1) - P(X)$ de $\mathbb{K}[X]$.

1. Déterminer $\text{Ker } \Delta$.
2. Déterminer $\text{Im } \Delta|_{\mathbb{K}_n[X]}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que Δ est surjectif de $\mathbb{K}[X]$ sur lui-même.

Applications linéaires abstraites

— **Exercice 30** ●○○○ — **Banque d'exercices CCINP 2025 (62)**

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\text{Id}_E = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f .
2. Prouver que $E = \text{Ker}(f + \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$:
 - a. en utilisant le lemme des noyaux ;
 - b. sans utiliser le lemme des noyaux.
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie. Prouver que $\text{Im}(f + \text{Id}_E) = \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$.

— **Exercice 31** ●●○○ —  Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie.

1. Montrer que l'application $\Phi : (f, g) \mapsto f + g$ de $F \times G$ dans E est linéaire.
2. Déterminer l'image et le noyau de Φ .
3. En déduire une nouvelle preuve de la formule de Grassmann.

— **Exercice 32** ●●○○ —  **Mines-Ponts MP 2022**

Soit E , F et G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie.

1. Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G)$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $h \in \mathcal{L}(F, G)$ tel que $g = h \circ f$.
2. Soit $(g, h) \in \mathcal{L}(E, G) \times \mathcal{L}(F, G)$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $g = h \circ f$.

— **Exercice 33** ●●○○ —  Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. À quelle condition nécessaire et suffisante l'anneau $\mathcal{L}(E)$ est-il commutatif ?

— **Exercice 34** ●●○○ —  **Stabilisation des sous-espaces de dimension k**
Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n et $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Que peut-on dire d'un endomorphisme de E laissant stable tous les sous-espaces de dimension k ?

— **Exercice 35** ●○○○ —

Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbb{K}^3$ tel que $f^2 = 0$. Montrer que $\text{rg } f = 1$.

— **Exercice 36** ●●○○ — Soit f un endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ tel que $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ ne sont pas supplémentaires. Montrer que $\text{Ker } f \subset \text{Im } f$ ou $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$.

— **Exercice 37** ●●○○ — Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence

$$\text{Ker } u = \text{Im } u \iff u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ et } \dim E = 2 \text{rg } u.$$

— **Exercice 38** ●●○○ — Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0_E\} \iff \text{Ker } f^2 = \text{Ker } f$.
2. Montrer que $E = \text{Ker } f + \text{Im } f \iff \text{Im } f^2 = \text{Im } f$.
3. On suppose à présent E de dimension finie. Montrer que s'équivalent :
(i) $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$. (ii) $\text{Ker } f^2 = \text{Ker } f$. (iii) $\text{Im } f^2 = \text{Im } f$.

— **Exercice 39** ●●○○ — Soit f un endomorphisme de rang p d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie n , avec $p \leq n$. Montrer que f peut s'écrire comme la somme de p endomorphismes de rang 1.

— **Exercice 40** ●●○○ —

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose f nilpotent et on note p son indice de nilpotence.
 - a. Écrire avec des quantificateurs l'assertion « $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ ».
 - b. Montrer qu'il existe x dans E tel que la famille $(f^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$ soit libre.
 - c. En déduire que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
2. a. Montrer que f est nilpotent si

$$\forall x \in E, \quad \exists p \in \mathbb{N}, \quad f^p(x) = 0_E.$$

- b. Trouver un contre-exemple au résultat précédent lorsque E est de dimension infinie.

— **Exercice 41** ●●○○ — Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer l'inégalité

$$|\operatorname{rg} f - \operatorname{rg} g| \leq \operatorname{rg}(f + g) \leq \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g.$$

On suppose de plus que $F = E$, que $f + g$ est un automorphisme et que $f \circ g = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer que $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g = \dim E$.

— **Exercice 42** ●●○○ — **Rang et composition**

Soit E, F, G des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie.

1. Montrer que, pour tous $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$,

$$\operatorname{rg} f - \operatorname{rg}(g \circ f) = \dim(\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f).$$

2. *Première application.*

- a. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que la suite $(r_n)_{n \geq 0} = (\operatorname{rg}(u^n))_{n \geq 0}$ est convexe, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad r_{n+1} - r_n \geq r_n - r_{n-1}.$$

Remarque : ce résultat équivaut à la concavité de la suite $(\dim(\operatorname{Ker} u^n))_{n \geq 0}$.

- b. Établir plus généralement l'inégalité de Frobenius :

$$\forall f, g, h \in \mathcal{L}(E), \quad \operatorname{rg}(f \circ g) + \operatorname{rg}(g \circ h) \leq \operatorname{rg}(f \circ g \circ h) + \operatorname{rg} g.$$

3. *Deuxième application – produit nul d'endomorphismes nilpotents.*

- a. Montrer que si $v, w \in \mathcal{L}(E)$ commutent avec w nilpotent et $v \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$, alors $\operatorname{Ker} w \cap \operatorname{Im} v \neq \{0_E\}$.
- b. Soit $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{L}(E)$ des endomorphismes nilpotents et commutant deux à deux, avec $n = \dim E$. Montrer que $u_1 \circ \dots \circ u_n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

4. *Troisième application – endomorphisme nilpotent de rang maximal.*

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent et $n = \dim E$. Montrer que $\operatorname{rg} u = n - 1$ si et seulement si $u^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Indication. $\Leftarrow$: s'inspirer de la question 1 de l'exercice 40 ;

$\Rightarrow$: montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{rg}(u^k) - \operatorname{rg}(u^{k+1}) \leq \dim(\operatorname{Ker} u)$.

— **Exercice 43** ●●○○ — ?

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que

$$\dim \operatorname{Ker}(u + v) \leq \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v) + \dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v).$$

— **Exercice 44** ●●●● — ? Soit E de dimension finie n non nulle et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $\operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Ker} u^3$. Montrer que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u^4$.

— **Exercice 45** ●●○○ — ?

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $u + v \in \operatorname{GL}(E)$.

— **Exercice 46** ●●○○ — ? ? **Commutant d'un endomorphisme cyclique**

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E tel que $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Trouver tous les endomorphismes de E commutant avec f .

— **Exercice 47** ●●○○ — **Noyaux itérés**

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n . Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note

$$K_p = \operatorname{Ker} f^p \quad \text{et} \quad I_p = \operatorname{Im} f^p.$$

1. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $K_p \subset K_{p+1}$ et $I_{p+1} \subset I_p$.
2. a. Montrer qu'il existe un plus petit entier naturel $r \leq n$ tel que $K_r = K_{r+1}$.
b. Montrer alors que $I_r = I_{r+1}$ et

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad K_r = K_{r+p} \quad \text{et} \quad I_r = I_{r+p}.$$

- c. Montrer enfin que $E = K_r \oplus I_r$.

— **Exercice 48** ●●○○ — ? **Décomposition de Fitting (Mines-Ponts MP 2022)**

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose

$$\mathcal{N} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \operatorname{Ker} u^k \quad \text{et} \quad \mathcal{I} = \bigcap_{k=0}^{+\infty} \operatorname{Im} u^k.$$

1. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{N} = \operatorname{Ker} u^p$ et $\mathcal{I} = \operatorname{Im} u^p$.
Indication : on pourra utiliser les résultats de l'exercice précédent.
2. a. Montrer que $E = \mathcal{N} \oplus \mathcal{I}$.
b. Montrer que $\mathcal{N}$ et $\mathcal{I}$ sont stables par u .
c. Montrer que les endomorphismes induits $u|_{\mathcal{N}}$ et $u|_{\mathcal{I}}$ sont respectivement nilpotent et bijectif.
3. Réciproquement, on suppose que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E et stables par u , avec $u|_F$ nilpotent et $u|_G$ bijectif. Montrer que $F = \mathcal{N}$ et $G = \mathcal{I}$.

Hyperplans et formes linéaires

— **Exercice 49** ●○○○ — Montrer qu'une forme linéaire sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel qui n'est pas l'application nulle est surjective.

— **Exercice 50** ●○○○ — Montrer que la famille $(P \mapsto P^{(k)}(0))_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$.

— **Exercice 51** ●●○○ — Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f l'application définie par

$$f : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}, P \longmapsto \int_0^1 P(t) dt.$$

1. Montrer que f est une forme linéaire non nulle. En déduire la dimension de $\text{Ker } f$.
2. Déterminer une base de $\text{Ker } f$.

— **Exercice 52** ●●○○ — Dans $\mathbb{R}^4$, écrire le sous-espace engendré par les vecteurs $(2, 1, 0, 2)$ et $(-1, -2, 3, 1)$ comme l'intersection de noyaux de deux formes linéaires.

— **Exercice 53** ●●●○ — Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 2 et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ si et seulement s'il existe un vecteur $a \in \text{Ker } u$ et une forme linéaire λ de E tels que, pour tout $x \in E$, $u(x) = \lambda(x)a$.

— **Exercice 54** ●○○○ — Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que $\{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(\alpha) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{C}[X]$ et en déterminer une base.

— **Exercice 55** ●○○○ — ☒ Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$, ainsi que H_1 et H_2 deux hyperplans distincts de E . Calculer $\dim(H_1 \cap H_2)$.

— **Exercice 56** ●●○○ — **Mines-Ponts MP 2022** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$A = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \sum_{k=0}^n P^{(k)}(1) = 0 \right\}.$$

1. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et en déterminer la dimension.
2. Donner une base de A .

— **Exercice 57** ●●○○ — **Mines-Ponts MP 2022**

Soit $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \dots < x_n < y_n$ des réels et $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

1. On suppose que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\int_{x_i}^{y_i} P(t) dt = 0$. Montrer que $P = 0$.
2. Montrer qu'on peut trouver $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul vérifiant $\int_{x_i}^{y_i} P(t) dt = 0$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

— **Exercice 58** ●●○○ — **Mines-Ponts MP 2022**

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ vérifiant

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, \quad f(AB) = f(BA).$$

Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $f = a \text{tr}$.

Indications

Exercice 9. Comment transformer une $\mathbb{C}$ -base en $\mathbb{R}$ -base ?

Exercice 14. 1. On pourra procéder par récurrence sur le degré et s'intéresser aux polynômes $P(X+1) - P(X)$.

Exercice 20. Utiliser l'algorithme de la base incomplète.

Exercice 22. On pourra raisonner par récurrence sur $n - \dim F_1$ et commencer par établir que si G_1 et G_2 sont deux sous-groupes de G inclus strictement dans G , alors $G_1 \cup G_2$ est strictement inclus dans G .

Exercice 24. Appliquer les théorèmes de la base extraite/incomplète à des espaces et des familles bien choisis.

Exercice 29. On pourra se remémorer les résultats de l'exercice 14.4.

Exercice 34. Procéder par récurrence descendante sur k .

Exercice 43. Considérer la restriction de u à $\text{Ker}(u+v)$

Exercice 44. Utiliser le résultat de la question 2.a de l'exercice 42.

Exercice 46. Considérer une base de E en lien avec le résultat obtenue à la question 1.b de l'exercice 40.

Exercice 48. 3. Commencer par établir les inclusions $F \subset \mathcal{N}$ et $G \subset \mathcal{I}$.

Exercice 58. Examiner le comportement de f en lien avec les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Éléments de réponses

Exercice 1. 1. Faux. 2. Faux. 3. Vrai. 4. Vrai. 5. Faux.

Exercice 3. 1. $\dim F = 3$. 2. $\dim = 2$. 3. $\dim F_\alpha = \begin{cases} 2n+2 & \text{si } \alpha = 0 \\ n+1 & \text{sinon.} \end{cases}$

$$4. \dim \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) = \dim \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K}) = \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Exercice 4. $\dim E = 3$.

Exercice 5. $\{x \mapsto A \sin(x + \varphi) \mid A, \varphi \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(\cos, \sin)$ et la dimension est 2.

Exercice 7. 2. $\left(\binom{p}{k} a^{p-k}\right)_{0 \leq k \leq n}$.

Exercice 15. 3. Non (contre-exemple...). 4. $\{P \in \mathbb{C}[X] \mid P[\mathbb{Z}] \subset \mathbb{Z}\} = \text{Vect}(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Exercice 16. 1. et 2. On a notamment $\text{Ker } \Phi \supset \mathbb{K}[u]$ et la famille $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}[u]$ est libre.

3. L'endomorphisme v défini par $v(e_0) = x_0$ et $v(e_{n+1}) = u(v(e_n)) - w(e_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, convient.

Exercice 18. $\dim F = 2$, $\dim G = 3$, $\dim(F+G) = 4$ et $\dim(F \cap G) = 1$.

Exercice 19. 3. $\dim F = n^2 - 1$.

Exercice 25. 1. 3. 2. 3. 3. 4.

Exercice 29. 1. $\text{Ker } \Delta = \mathbb{K}_0[X]$. 2. $\text{Im } \Delta|_{\mathbb{K}_n[X]} = \mathbb{K}_{n-1}[X]$, pour $n \geq 1$.

Exercice 31. 2. $\text{Im } \Phi = F + G$ et $\text{Ker } \Phi = \{(x, -x) \mid x \in F \cap G\}$.

3. On conclut via la formule du rang, en notant que $\text{Ker } \Phi \simeq F \cap G$.

Exercice 32. 1. La CNS est $\text{Ker } f \subset \text{Ker } g$. 2. La CNS est $\text{Im } g \subset \text{Im } h$.

Exercice 33. $\dim E \leq 1$.

Exercice 34. Ce sont les homothéties.

Exercice 45. La CNS est $E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u$.

Exercice 46. L'ensemble des endomorphismes commutant avec f est $\text{Vect}(\text{Id}_E, f, f^2)$.

Exercice 55. $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$.