# 16 Limites et continuité des fonctions

**Cahier de calcul :** $\varnothing$. **Banque CCINP :** $\varnothing$.

## Calculs directs de limites

**Exercice 1** ●●○○ Déterminer les limites suivantes.

**1.** $\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)$ en $+\infty$. **2.** $\sqrt{x^3+x}-\sqrt{x^3+1}$ en $+\infty$.

**3.** $\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3-x^2}$ en $+\infty$. **4.** $\dfrac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}$ en 0, avec $m, n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 2** ●●○○ Déterminer les limites suivantes.

**1.** $x\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor$ en 0 et en $+\infty$. **2.** $\dfrac{x^2}{\ln(\mathrm{e}^x+1)}$ en $\pm\infty$.

**3.** $\dfrac{\cos(x^2+x)}{x^2+x}$ en $+\infty$. **4.** $\dfrac{5x}{\sqrt{2x^2+3}}$ en $+\infty$. **5.** $\ln(1+\mathrm{e}^x)-x$ en $+\infty$.

**6.** $\ln(3x^2-4)-\ln(2x^2+1)$ en $+\infty$. **7.** $\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^x$ en $+\infty$.

**8.** $(\ln x+\sin x)^2$ en $+\infty$. **9.** $\ln x \times \ln\ln x$ en 1. **10.** $\dfrac{\sin(\mathrm{e}^x)+\mathrm{e}^{\sin x}+x^2}{\sqrt{x^2+1}}$ en $+\infty$.

**11.** $\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^{1/x}$ en $+\infty$. **12.** (●●●) $\dfrac{\mathrm{e}^{\alpha x^2}}{\mathrm{e}^{\beta x^3}+\mathrm{e}^{\gamma x}}$ en $+\infty$, avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

**Exercice 3** ●●○○ Déterminer les limites suivantes.

**1.** $(1+x)^{1/x}$ en 0. **2.** $(x-1)^{x-1}$ en 1. **3.** $\dfrac{\sin(3\pi x)}{\sin(4\pi x)}$ en 0. **4.** $\dfrac{\ln(1+x)}{\sin\sqrt{x}}$ en 0.

**5.** $\dfrac{2^x-1}{\sin x}$ en 0. **6.** $\dfrac{x^\beta-1}{x^\alpha-1}$ en 0, avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$. **7.** $\dfrac{1}{x(x+1)}-\dfrac{1}{x}$ en $0^+$.

**8.** $\dfrac{\sin x}{x^2\ln(1+2x)-x^4}$ en 0. **9.** $\dfrac{x^\alpha-1}{\ln x}$ en 0 et en 1, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Exercice 4** ●●○○ Montrer que les fonctions suivantes n'ont pas de limite.

**1.** $x \longmapsto \sin(\cos x)$ en $+\infty$. **2.** $x \longmapsto \sin\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ en 0. **3.** $x \longmapsto \dfrac{x^x}{\lfloor x\rfloor^{\lfloor x\rfloor}}$ en $+\infty$.

**4.** $x \longmapsto \cos\left(\mathrm{e}^{1/x^2}\right)$ en 0.

## Branches infinies

**Exercice 5** ●○○○ On considère la fonction $f$ définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ par

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}.$$

1. Étudier la limite de $f$ en 1. En déduire l'équation d'une asymptote à la courbe de $f$.
2. Montrer que la droite $\Delta$ d'équation $y = x+2$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\Delta$.
3. Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormal.

**Exercice 6** ●●○○ Étudier les branches infinies des fonctions suivantes.

**1.** $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$. **2.** $x \longmapsto \dfrac{x^3-4x^2+5x+1}{9-4x^2}$. **3.** $x \longmapsto \ln(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})$.

**4.** $x \longmapsto \sqrt[3]{\dfrac{2+3x}{x-5}}$. **5.** $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{(x-1)^3}{x+1}}$.

## Propriétés du cours

**Exercice 7** ●●○○ Soit $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, $a \in D$ et $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$. On suppose que $\lim\limits_a f = \ell$ et que $\lim\limits_a g = \ell'$. Démontrer les résultats suivants du cours :

**a.** $\lim\limits_a (f+g) = \ell+\ell'$ ; **b.** $\lim\limits_a fg = \ell\ell'$ ; **c.** Si $\ell \neq 0$, $\lim\limits_a \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{\ell}$.

**Exercice 8** ●●○○ **Composition à gauche d'une suite par une fonction**

Soit $I$ un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $\ell \in \overline{I}$, $L \in \overline{\mathbb{R}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à valeurs dans $I$. Démontrer le résultat suivant

$$\text{Si } \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad \text{et} \quad \text{si } \lim_{x\to\ell} f(x) = L, \quad \text{alors} \quad \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = L.$$

# Fonctions abstraites

**Exercice 9** ●○○○ ☑ Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{x}{y}.$$

**Exercice 10** ●○○○ 💡☑
Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ périodiques qui possèdent une limite en $+\infty$.

**Exercice 11** ●●○○
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée sur tout intervalle de longueur 1.

1. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0$.
   Soit $\varepsilon > 0$ et $A > 0$ tel que, pour tout $x \geqslant A$, $|f(x+1) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.
   a. Montrer que, pour tout $x \geqslant A$, $|f(x) - f(x-n)| \leqslant n\varepsilon$, où $n = \lfloor x - A \rfloor$.
   b. En déduire que, pour tout $x \geqslant A$, on a $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right| \leqslant \dfrac{M}{x} + \varepsilon$, où $M$ est un majorant de $|f|$ sur $[A, A+1]$.
   c. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.
2. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x+1) - f(x)) = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ell$.

**Exercice 12** ●●●○ Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, où $I$ est un intervalle ouvert contenant 0. On suppose que

$$\lim_{x\to0} f(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = 0.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in I \setminus \{0\}$,
$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x2^{-n})}{x} + \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\varphi\big(x2^{-k}\big), \qquad \text{où } \varphi(x) = \frac{f(2x) - f(x)}{x}.$$
2. En déduire que $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.
3. Que peut-on dire si $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{f(2x) - f(x)}{x} = \ell \in \mathbb{R}$ ?

**Exercice 13** ●●●○ Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante, non identiquement nulle et telle que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

1. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$. Que vaut $\lim\limits_{0} f$ ?
2. Étudier le signe de $f$, puis en déduire que $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

**Exercice 14** ●●●○ 💡
Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) + f'(x)) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

# Continuité

**Exercice 15** ●○○○ ☑ Soit $m$ et $p$ deux réels et $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ mx + p & \text{si } 0 \leqslant x < 2 \\ 2x - 6 & \text{si } x \geqslant 2. \end{cases}$$

À quelles conditions sur les réels $m$ et $p$ la fonction $f$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$ ?

**Exercice 16** ●●○○ ☑ Étudier la définition et la continuité des fonctions suivantes ainsi que leurs éventuels prolongements par continuité aux bornes.

1. $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-1/x}$.
2. $f(x) = \dfrac{x}{2x + |x|}$.
3. $f(x) = \Big(x(\ln x)^2 + 1\Big)^{1/\ln x}$.
4. $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$.
5. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.
6. (●●●) $f(x) = \dfrac{x}{2x\ln x + \sqrt{x}}$.
7. $f(x) = \dfrac{x \ln x}{x - 1}$.
8. $f(x) = \cos\left(\dfrac{\pi x}{2|x|}\right)$.
9. $f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.
10. $f(x) = x^2 \cos\dfrac{1}{x}$.
11. $f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$.
12. $f(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}\left(x - \lfloor x \rfloor - \dfrac{1}{2}\right)$.

**Exercice 17** ●○○○ Soit $f, g \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ deux fonctions telles que $f|_{\mathbb{Q}} = g|_{\mathbb{Q}}$. Montrer que $f = g$.

**Exercice 18** ●●○○ Soit $D$ une partie dense de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Si la restriction $f|_D$ est croissante, montrer alors que $f$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Le résultat précédent reste-t-il vrai en remplaçant « croissante » par « strictement croissante » ?

**Exercice 19** ●●●○

Trouver toutes les applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant 1 et $\sqrt{2}$ pour périodes.

**Exercice 20** ●●○○ **Fonctions lipschitziennes** Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$ et $I$ un intervalle. Une application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite $k$-lipschitzienne sur $I$ lorsque

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|.$$

1. Montrer que $f$ est continue sur $I$.
2. Supposons que $k \in ]0, 1[$, que $I$ est un segment et que $f[I] \subset I$. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 \in I$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.
   - **a.** Montrer que $f$ admet un unique point fixe $\ell \in I$.
   - **b.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - \ell| \leqslant k^n |x_0 - \ell|$.
   - **c.** En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell$.
   - **d.** Déterminer une valeur de $n$ pour laquelle $x_n$ est une valeur approchée de $\ell$ à $10^{-3}$ près.
3. (●●●) Supposons dorénavant que $k = 1$ que $I = [0, 1]$. L'objet de cette question est de montrer que l'ensemble $X$ des points fixes de $f$ est soit vide, soit un segment. Supposons $X$ non vide.
   - **a.** Justifier l'existence de $m = \inf X$ et $M = \sup X$.
   - **b.** Montrer que $m$ et $M$ appartiennent à $X$.
   - **c.** Conclure.

**Exercice 21** ●●○○

Soit $f$ et $g$ deux fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

**(i)** $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ ;

**(ii)** $f$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Montrer que $f$ et $g$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

**Exercice 22** ●●○○ Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante et surjective de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$. Montrer que $f$ est continue sur $[a, b]$.

**Exercice 23** ●●○○ **Continuité d'une intégrale à paramètre**

Soit $\varphi \in \mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R})$. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^1 |x - \varphi(t)| \,\mathrm{d}t.$$

Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 24** ●●●○ **Continuité d'une suite de fonctions**

Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+x)}.$$

1. **a.** Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que la suite $\left(\varphi_n(x) + \dfrac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
   **b.** Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, en déduire que la suite $(\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On notera $\varphi(x)$ sa limite.

On définit ainsi sur $\mathbb{R}_+^*$ une fonction $\varphi : x \longmapsto \varphi(x)$.

2. **a.** Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leqslant \varphi(x) - \varphi_n(x) \leqslant \dfrac{1}{n}$.
   **b.** En revenant à la définition, montrer que $\varphi$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   *On pourra remarquer que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, x \in \mathbb{R}_+^*$,*
   $$\varphi(x) - \varphi(a) = (\varphi(x) - \varphi_n(x)) + (\varphi_n(x) - \varphi_n(a)) + (\varphi_n(a) - \varphi(a)).$$

**Exercice 25** ●●●● **Tératologie**

1. *Fonction de Dirichlet.* Montrer que la fonction indicatrice des rationnelle $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.
2. *Fonction de Thomae.* Montrer que la fonction $T$ de Thomae définie sur $\mathbb{R}$ par
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 1/q & \text{si } x = p/q \text{ avec } p \wedge q = 1 \text{ et } q > 0, \end{cases}$$
   est continue en tout irrationnel et discontinue en tout rationnel.

**Exercice 26** ●●●○ Étudier, du point de vue de la continuité et de la surjectivité, l'application $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ définie par

$$f(t) = t \text{ si } t \notin \mathbb{Q} \qquad \text{et} \qquad f(t) = 1 - t \text{ si } t \in \mathbb{Q}.$$

**Exercice 27** ●●○○

Exhiber une application de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ bijective et discontinue en tout point.

## Équations fonctionnelles

**Exercice 28 ●○○○** ☑ Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues en 0 telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)$.

**Exercice 29 ●●○○** ☑ Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) - f(x) = x.$$

**Exercice 30 ●●○○** 💡☑ **Équation fonctionnelle de Cauchy**
Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

**Exercice 31 ●●○○** Notons $\mathcal{A} = \left\{ g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \;\middle|\; \forall x \in \mathbb{R}, \quad g\left(x^2\right) = g(x) \right\}$.

1. Donner un exemple de fonction non constante appartenant à $\mathcal{A}$.
2. Soit $f$ une fonction de $\mathcal{A}$ qui est continue en 0 et en 1. Montrer que, pour tous $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f\left(x^{1/2^n}\right)$. En déduire que $f$ est constante sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 32 ●●○○** 💡☑ Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(xy) = f(x)f(y).$$

**Exercice 33 ●●●○** ☑ On s'intéresse aux fonctions $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f\left(x^2 + f(y)\right) = f(x)^2 + y. \qquad (\star)$$

1. Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une solution de la relation $(\star)$.
   a. Montrer que $f(-x) \in \{-f(x), f(x)\}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis que $f$ est impaire.
   b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $f\left(x^2\right) = f(x)^2$ et $f \circ f(x) = x$.
   c. Montrer que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous $x, y \geqslant 0$, puis en déduire la forme de $f$.
2. Déterminer toutes les solutions continues de la relation $(\star)$.

## Théorèmes liés à la continuité

**Exercice 34 ●○○○** ☑
Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $f(x)^2 = 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

**Exercice 35 ●○○○** 💡
Soit $f \in \mathscr{C}([0,1], [0,1])$. Montrer que $f$ admet un point fixe.

**Exercice 36 ●●○○** 💡
Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ décroissante. Montrer que $f$ possède un et un seul point fixe dans $\mathbb{R}$.

**Exercice 37 ●●○○** Soit $I$ un intervalle et $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ une fonction qui stabilise $I$. On suppose que $f \circ f$ possède un point fixe. Montrer qu'alors $f$ en possède un aussi.

**Exercice 38 ●●○○** Soit $f$ une fonction continue et bijective de $[0,1]$ sur $[0,1]$ vérifiant $f(0) \neq 1$. Montrer que $f(0) = 0$.

**Exercice 39 ●●○○**
Un randonneur parcourt 6 km en une heure. Montrer qu'il existe au moins un intervalle d'une demi-heure au cours duquel il parcourt exactement 3 km.

**Exercice 40 ●●○○** **Le TVI est faux dans $\mathbb{Q}$**
On considère la fonction polynomiale $f : x \longmapsto 2x^3 - x + 1$.

1. Montrer que $f$ réalise une surjection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les entiers premiers $p$ tels que $1/p$ ait un antécédent par $f$ dans $\mathbb{Q}$.
3. Conclure.

**Exercice 41 ●○○○**

1. Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{e^x - 1}}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que la fonction $x \longmapsto e^x \sin e^{-x}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

**Exercice 42 ●●●○** Soit $f : [-1\,,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.
Pour tout $u \in \mathbb{R}$, considérons la fonction $g_u : x \longmapsto ux - f(x)$ sur $[-1\,,1]$.

1. Soit $u \in \mathbb{R}$. Montrer que $g_u$ admet un maximum $M(u)$. On note $E_u$ l'ensemble des réels de $[-1\,,1]$ en lesquels $g_u$ atteint son maximum.
2. Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ et $(x,y) \in E_u \times E_v$. Montrer que
$$M(u) - M(v) \leqslant (u-v)x \quad \text{et} \quad M(v) - M(u) \leqslant (v-u)y.$$
En déduire que $|M(v) - M(u)| \leqslant |v-u|$.
3. Montrer que la fonction $M : u \longmapsto M(u)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 43 ●○○○** Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée.
Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées.

**Exercice 44 ●●○○** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

1. Montrer que si $f$ est périodique, alors elle est bornée.
2. Montrer que si $f$ possède des limites finies en $-\infty$ et $+\infty$, alors elle est bornée.
3. Montrer que si de plus ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ coïncident, alors $f$ possède un minimum ou un maximum sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que si $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{+\infty} f = +\infty$, alors $f$ possède un minimum sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 45 ●●○○** Soit $f, g \in \mathscr{C}([a\,,b],\mathbb{R})$.
On suppose que, pour tout $x \in [a\,,b]$, $f(x) < g(x)$. Montrer l'assertion
$$\exists \lambda > 0, \quad \forall x \in [a\,,b], \quad f(x) + \lambda \leqslant g(x).$$

**Exercice 46 ●●●○** Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ surjective. Montrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ possède une infinité de solutions.

**Exercice 47 ●●●○** **Mines-Ponts PSI 2019**
Déterminer les éléments de $\mathbb{R}[X]$ qui commutent avec la fonction cosinus.

## Continuité uniforme, fonctions lipschitziennes

**Exercice 48 ●●○○**

1. La somme de deux fonctions uniformément continues est-elle toujours uniformément continue ?
2. Le produit de deux fonctions uniformément continues est-il toujours uniformément continu ? Et si les fonctions sont bornées ?

**Exercice 49 ●●●○** **Caractérisation séquentielle de la continuité uniforme**

1. Soit $I$ un intervalle et $f \in \mathbb{C}^I$ une fonction. Montrer que $f$ est uniformément continue sur $I$ si et seulement si pour toutes suites $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et $(y_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de $I$
$$\lim_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0 \implies \lim_{n\to+\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 0$$
2. Les fonctions suivantes sont-elles uniformément continues ?
   **a.** $\ln$ sur $]0\,,1]$ et $[1\,,+\infty[$. **b.** $x \longmapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$.
   **c.** $x \longmapsto \sin\big(x^2\big)$ sur $\mathbb{R}$. **d.** $x \longmapsto \cos\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

**Exercice 50 ●●●○** Soit $f$ une application continue sur $\mathbb{R}_+$ qui admet une limite finie en $+\infty$. Montrer que $f$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

**Exercice 51 ●●●○** Montrer qu'une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$ est majorée par une fonction affine.

**Exercice 52 ●●●○** Soit $I$ un intervalle borné et $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ uniformément continue. Montrer que $f$ est bornée sur $I$.

**Exercice 53 ●●●○** Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ périodique.
Montrer que $f$ est uniformément continue.

**Exercice 54 ●○○○** **Fonctions lipschitziennes**

1. Montrer qu'une combinaison linéaire de fonctions lipschitziennes en est aussi une.
2. Que dire d'un produit de deux fonctions lipschitziennes ? Et d'une composée ?

### Exercice 55 ●●●○ — Module de continuité d'une fonction

Soit $I$ un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ bornée.

**1.** Justifier pour tout $h \geqslant 0$ la définition du réel :
$$\omega_f(h) = \sup\big\{|f(x) - f(y)| \;\big|\; x, y \in I, |x-y| \leqslant h\big\}.$$
La fonction $\omega_f$ ainsi définie est appelée le *module de continuité de $f$ sur $I$*.

**2.** Que vaut $\omega_f(0)$ ?

**3.** Étudier la monotonie de $\omega_f$.

**4.** **a.** Montrer que $\omega_f$ est sous-additive, *i.e.* vérifie
$$\forall h, k \in \mathbb{R}_+, \quad \omega_f(h+k) \leqslant \omega_f(h) + \omega_f(k).$$
**b.** En déduire que
$$\forall h, \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad \omega_f(\lambda h) \leqslant (\lambda+1)\omega_f(h).$$

**5.** **a.** Montrer que $f$ est uniformément continue sur $I$ si et seulement si $\omega_f$ est continue en 0.
**b.** Grâce à la sous-additivité, montrer que si $f$ est uniformément continue sur $I$, alors $\omega_f$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

## Indications

**Exercice 1.** Utiliser la quantité conjuguée.

**Exercice 10.** Penser à la caractérisation séquentielle de la limite.

**Exercice 14.** Poser $g(x) = f(x) + f'(x)$ et exprimer $f$ en fonction de $g$ via notamment une intégrale qu'il conviendra de découper adroitement.

**Exercice 19.** Que peut-on dire de la partie $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\,\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$ (cf. exercice 11.18).

**Exercice 25.** Exploiter la densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Pour la continuité de la fonction de Thomae en les irrationnels, on pourra commencer par établir que si une suite $(p_n/q_n)_{n\geqslant 0}$ de rationnels irréductibles converge vers un irrationnel, alors $(q_n)_{n\geqslant 0}$ diverge vers $+\infty$.

**Exercice 26.** Exploiter la densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, en lien avec la caractérisation séquentielle de la continuité.

**Exercice 27.** S'inspirer de la fonction de l'exercice 26.

**Exercice 30.** Déterminer $f$ sur $\mathbb{Z}$, puis sur $\mathbb{Q}$.

**Exercice 32.** On pourra se ramener à $g(x+y) = g(x) + g(y)$.

**Exercice 35 et 36.** On pourra s'intéresser à $x \longmapsto f(x) - x$

**Exercice 47.** Distinguer des cas selon le degré et penser à dériver.

**Exercice 49.** **1.** Pour le sens réciproque, contraposer et s'inspirer de la preuve du théorème de Heine.

**Exercice 51.** Mettre en œuvre un télescopage en lien avec la définition de la continuité uniforme.

## Éléments de réponses

**Exercice 1.** **1.** 1. **2.** 0. **3.** $\dfrac{2}{3}$. **4.** $\begin{cases} 0 & \text{si } m > n \text{ ou } m = 0 \\ 1 & \text{si } m = n \neq 0 \\ +\infty & \text{si } m < n \text{ et } m-n \text{ pair} \\ \text{pas de limite} & \text{si } m < n \text{ et } m-n \text{ impair.} \end{cases}$

**Exercice 2.** **1.** 1 et 0. **2.** $+\infty$ et $+\infty$. **3.** 0. **4.** $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$. **5.** 0. **6.** $\ln\dfrac{3}{2}$. **7.** $\mathrm{e}^4$. **8.** $+\infty$. **9.** 0. **10.** $+\infty$. **11.** 1.

**Exercice 3.** **1.** e. **2.** 1. **3.** $\dfrac{3}{4}$. **4.** 0. **5.** $\ln 2$. **7.** $-1$. **8.** $+\infty$.
**6.** $\begin{cases} 0 & \text{si } \beta = 0 \text{ ou } (\alpha < 0 \text{ et } \beta > \alpha) \\ 1 & \text{si } \alpha, \beta > 0 \text{ ou } \alpha = \beta < 0 \\ -\infty & \text{si } \alpha > 0 \text{ et } \beta < 0 \\ +\infty & \text{si } \beta < \alpha < 0. \end{cases}$ **9.** En 0 $\begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \geqslant 0 \\ -\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$ et en 1 $\begin{cases} 0 & \text{si } \alpha = 0 \\ \alpha & \text{si } \alpha \neq 0. \end{cases}$

**Exercice 6.** **1.** $y = 1$ en $+\infty$ et $y = -1$ en $-\infty$. **2.** $x = \pm\dfrac{3}{2}$ et $-\dfrac{x}{4} + 1$ en $\pm\infty$.
**3.** $y = x$ en $+\infty$ et $y = -x$ en $-\infty$. **4.** $x = 5$ et $y = \sqrt[3]{3}$ en $\pm\infty$.
**5.** $x = -1$, $y = 2 - x$ en $-\infty$ et $y = x - 2$ en $+\infty$.

**Exercices 9 et 10.** $f$ est constante.

**Exercice 15.** $(m, p) = (-1/2, -1)$.

**Exercice 16.** **1.** $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$. **2.** $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$.
**3.** $f \in \mathscr{C}(]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[, \mathbb{R})$, $f(0) = f(1) = 1$. **4.** $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$, $f(0) = 0$.
**5.** $f \in \mathscr{C}(]-1,0[\,\cup\,]0,+\infty[, \mathbb{R})$, $f(0) = 1$.
**6.** $f \in \mathscr{C}(]0,\alpha_1[\,\cup\,]\alpha_2,+\infty[, \mathbb{R})$, avec $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1/2$ et $f(0) = 0$.
**7.** $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. **8.** $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$, $f(0) = 0$.
**9.** $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. **10.** $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$, $f(0) = 0$. **11.** $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$, $f(0) = -\dfrac{1}{2}$.
**12.** $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

**Exercice 19.** Ce sont les fonctions constantes.

**Exercice 26.** La fonction $f$ est surjective et admet 1/2 pour unique point de continuité.

**Exercice 27.** La fonction $x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \\ x + \frac{1}{2} - \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ convient.

**Exercice 28.** Fonctions constantes.

**Exercice 29.** $x \longmapsto x + a$ avec $a \in \mathbb{R}$.

**Exercice 30.** Les fonctions linéaires $x \longmapsto ax$ avec $a \in \mathbb{R}$.

**Exercice 32.** $x \longmapsto x^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, et la fonction nulle.

**Exercice 33.** $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

**Exercice 34.** $f$ est constante égale à 1 ou à $-1$ sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 47.** Il s'agit des polynômes $\alpha$ et $X$, où $\alpha$ est l'unique point fixe de cos.