

# Programme de colles

semaine 10  
du 8 au 12 décembre

Tous les énoncés du cours (définitions et théorèmes) sont exigibles. En revanche, les seules démonstrations exigibles sont celles des résultats mentionnés au paragraphe « Questions de cours ».

## Chapitre 11 - Structures algébriques usuelles (2<sup>e</sup> partie)

*Exercices en lien avec la structure de groupe.*

- Structure d'anneaux :
  - × Anneaux usuels :  $(\mathbb{Z}, +, \times)$ ,  $(\mathbb{Q}, +, \times)$ ,  $(\mathbb{R}, +, \times)$ ,  $(\mathbb{C}, +, \times)$ .
  - × Anneau produit, anneau  $A^X$ .
  - × Règles de calcul dans un anneau.
  - × Diviseurs de zéro, anneau intègre.
  - × Groupe des éléments inversibles.
- Sous-anneau, caractérisation.
- Structure de corps, sous-corps.
- Morphisme d'anneaux, morphisme induit entre les groupes des éléments inversibles.

## Chapitre 12 - Matrices et systèmes linéaires

- Matrices à coefficients dans  $\mathbb{K}$ , avec  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ , matrices élémentaires, symbole de Kronecker.
- Opérations matricielles :
  - × combinaison linéaire, multiplication, matrice identité, produit par blocs ;
  - × transposition, propriétés ;
  - × produit de matrices élémentaires, lien avec les lignes/colonnes/coefficients d'une matrice.
- Résolution des systèmes linéaires par la méthode du pivot de Gauss.
- Anneau des matrices carrées :
  - × Matrice diagonale et triangulaire inférieure/supérieure, stabilité par combinaison linéaire et par produit.
  - × Matrice symétrique/antisymétrique.
  - × Calculs de puissance d'une matrice carrée, formule du binôme.
  - × Trace d'une matrice carrée, propriétés.
- Matrice inversible :
  - × Opérations sur les matrices inversibles, lien avec les systèmes linéaires, lien avec les opérations élémentaires.
  - × Déterminant et inverse d'une matrice de taille 2, formule de Cramer.
  - × Inversibilité et inverse d'une matrice triangulaire.

## Questions de cours

- Exposer les énoncés relatifs à n'importe quelle notion du programme de colle.

Les preuves des énoncés suivants sont exigibles.

- Associativité du produit matriciel.
- Propriétés de la transposition.
- Sous-anneau des matrices triangulaires supérieures.
- Matrices élémentaires (définition, coefficients, formules  $E_i E_j^\top = \dots$ ,  $E_j^\top E_i = \dots$  et  $E_{i,j} E_{k,\ell} = \dots$ ).
- Centre de l'anneau  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
- Toute matrice carrée se décompose de façon unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.