

Ce chapitre introduit des outils essentiels pour l'étude locale d'une fonction au voisinage d'un point ou l'étude asymptotique d'une suite. Rappelons que l'étude de la dérivée permet le cas échéant d'approcher localement une courbe par une droite (la tangente). Nous allons notamment généraliser ce point de vue en nous donnant des outils pour approcher une courbe au plus près localement par une courbe polynomiale de degré donné, tout en mesurant la qualité de l'approximation obtenue.

Dans l'ensemble de ce chapitre, la lettre D désigne une partie de $\mathbb{R}$, la lettre I un intervalle et la lettre n un entier naturel.

1 Négligeabilité

1.1 Notation « petit o » de Landau[†]

Définition 1 – Négligeabilité

- **Fonctions.** Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D . La fonction f est dite *négligeable devant g au voisinage de a* lorsqu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a et une fonction $\varepsilon : \mathcal{V} \cap D \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathcal{V} \cap D, \quad f(x) = \varepsilon(x)g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

Le cas échéant, on note $f \underset{a}{=} o(g)$ ou $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ (lire « f est un petit o de g au voisinage de a »).

- **Suites.** La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite *négligeable devant la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$* lorsqu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ et une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que

$$\forall n \geq N, \quad u_n = \varepsilon_n v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Le cas échéant, on note $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ (lire « u_n est un petit o de v_n »).

Lorsque la fonction g ne s'annule pas au voisinage de a (resp. lorsque la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang), on dispose d'un critère plus simple pour la négligeabilité, que l'on utilise la plupart du temps.

Théorème 2 – Critère de négligeabilité

- **Fonctions.** Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D . Si g ne s'annule pas au voisinage de a (sauf peut-être en a avec dans ce cas $f(a) = 0$), alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x)) \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
- **Suites.** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites. Si la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n) \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.

Démonstration. Le sens direct est clair. Pour la réciproque, il suffit de poser $\varepsilon(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ et $\varepsilon_n = \frac{u_n}{v_n}$ respectivement. ■

Exemple 3 $x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^4)$, MAIS $x^4 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$. $\frac{1}{x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$, MAIS $\frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
 $n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n^4)$. $2^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(3^n)$. $\frac{1}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$.

✗ **ATTENTION ! ✗** L'écriture $f \underset{a}{=} o(g)$ n'est qu'une notation pour indiquer que la fonction f appartient à l'ensemble des fonctions négligeables devant g au voisinage de a . L'implication suivante est évidemment fautive :

$$\left(f \underset{a}{=} o(h) \text{ et } g \underset{a}{=} o(h)\right) \implies f = g.$$

On a par exemple $x^4 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$ et $x^3 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$. Des remarques similaires valent pour les suites.

[†]. Edmund Georg Hermann Landau (1877 à Berlin – 1938 à Berlin) est un mathématicien allemand ayant significativement contribué à la théorie analytique des nombres.

Les petits o sont la formalisation d'une idée naturelle maintenue jusqu'ici à l'état d'intuition. Selon cette intuition, certains « infinis » sont plus « infinis » que d'autres, certains « zéros » sont plus « zéros » que d'autres. Dire que $x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^4)$ revient à affirmer l'immensité de x^4 comparativement à x^2 lorsque x est grand, et dire que $x^4 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$ revient à affirmer l'infinité petitesse de x^4 comparativement à x^2 lorsque x est petit. Les croissances comparées usuelles s'expriment ainsi naturellement en termes de petits o .

Théorème 4 – Croissances comparées usuelles des fonctions et des suites

Soit $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- **Au voisinage de $+\infty$.**
 - × Si $\alpha > 0$, $(\ln x)^\beta \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\alpha)$.
 - × Si $\alpha < \beta$, $x^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\beta)$.
 - × Si $\beta > 0$, $x^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{\beta x})$,
 - ou Si $a > 1$, $x^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(a^x)$.
 - × Si $0 < a < b$, $a^x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(b^x)$.
- **Au voisinage de 0.**
 - × Si $\alpha > 0$, $|x|^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} o(|\ln x|^\beta)$.
 - × Si $\alpha < \beta$, $|x|^\beta \underset{x \rightarrow 0}{=} o(|x|^\alpha)$.

Les croissances comparées usuelles des fonctions en $+\infty$ peuvent bien sûr être exprimées en termes de suites (remplacer x par n). En outre, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n!)$.

Nous avons introduit la notation « petit o » sous sa forme la plus élémentaire – mise en relation de deux fonctions ou de deux suites – mais on la rencontre en pratique souvent sous la forme suivante :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} g(x) + o(h(x)) \quad \text{pour les fonctions} \quad \text{et} \quad u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} v_n + o(w_n) \quad \text{pour les suites.}$$

Ces relations affirment que

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} g(x) + \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(h(x)) \quad \text{et} \quad u_n = v_n + \varepsilon_n \quad \text{avec} \quad \varepsilon_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(w_n),$$

i.e. que $o(h)$ est « une certaine fonction négligeable devant h au voisinage de a » et $o(w_n)$ « une certaine suite négligeable devant $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ».

Élagage à un niveau de précision. Partons de l'affirmation $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + o(x)$ – que nous établirons à la section 4. Grosso modo, cette proposition affirme que pour x proche de 0 : $e^x \approx 1 + x + x^2$. Or une approximation n'a de sens que si l'on peut mesurer l'erreur commise et il nous est dit ici que $e^x \approx 1 + x + x^2$ à UN $o(x)$ PRÈS qui représente le niveau de précision de l'approximation effectuée. On peut y voir une analogie avec une affirmation du type $\pi \approx 3,14$ à 10^{-2} près.

Or imaginons justement que l'on nous dise « π est égal à 3,14012 à 10^{-2} près », on répondrait alors « Pourquoi pas seulement 3,14, puisque l'on raisonne à 10^{-2} près ? » à raison. En effet, approcher à 10^{-2} près revient à négliger tout ce qui est plus petit que 10^{-2} et l'approximation $\pi \approx 3,14$ à 10^{-2} près est ainsi aussi précise que $\pi \approx 3,141592$ à 10^{-2} près, quand bien même on écrit deux décimales correctes dans un cas et six dans l'autre. Pour les petits o , il en va de même. Puisque $x^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x)$, la quantité x^2 est superflue dans la relation $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + o(x)$ qu'il est par conséquent légitime d'élaguer sous la forme $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x)$. Cette nouvelle relation n'est ni plus ni moins précise que la précédente, mais certainement plus lisible et économe et, par conséquent, à privilégier.

Tout petit o est un NIVEAU DE PRÉCISION, UN SEUIL DE VISIBILITÉ.
De vous-même, faites le ménage en élaguant tous les termes « invisibles ».

Théorème 5 – Limites finies et petits o

- **Fonctions.** Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $\ell \in \mathbb{R}$. Alors $\lim_a f = \ell \iff f \underset{a}{=} \ell + o(1)$.

En particulier, $\lim_a f = 0 \iff f \underset{a}{=} o(1)$. En résumé : $o(1) = \text{« une fonction de limite nulle en } a \text{ »}$.

- **Suites.** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite et $\ell \in \mathbb{R}$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \iff u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ell + o(1)$.

En particulier, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \iff u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1)$. En résumé : $o(1) = \text{« une suite de limite nulle »}$.

Démonstration. Pour le sens direct, on pose $\varepsilon = f - \ell$ et $\varepsilon_n = u_n - \ell$ respectivement. Le sens réciproque est clair par somme de limites. ■

1.2 Opérations sur les petits o

Introduisons quelques objets une fois pour toutes en vue des théorèmes du présent paragraphe :

- soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{f} : D \rightarrow \mathbb{R}$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{g} : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D ;
- soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\tilde{v}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites.

Théorème 6 – Les petits o absorbent les constantes multiplicatives

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

- **Fonctions.** Si $f \underset{a}{=} o(g)$, alors $f \underset{a}{=} o(\lambda g)$ et $\lambda f \underset{a}{=} o(g)$.
- **Suites.** Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$, alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(\lambda v_n)$ et $\lambda u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$.

Démonstration. Par hypothèse, il existe une fonction ε définie sur un voisinage $\mathcal{V}$ de a telle que $f = \varepsilon g$ sur $\mathcal{V} \cap D$ et $\lim_a \varepsilon = 0$. On a alors $f = \frac{\varepsilon}{\lambda} \times \lambda g$ et $\lambda f = (\lambda \varepsilon) g$ au voisinage de a ainsi que, par produit, $\lim_a \frac{\varepsilon}{\lambda} = \lim_a \lambda \varepsilon = 0$. ■

Exemple 7 En admettant l'égalité $e^{1/n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $2e^{1/n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 2 + \frac{2}{n} + 2o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 2 + \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Théorème 8 – La somme de deux petits o est un petit o

- **Fonctions.** Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et si $\tilde{f} \underset{a}{=} o(g)$, alors $f + \tilde{f} \underset{a}{=} o(g)$.
- **Suites.** Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ et si $\tilde{u}_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$, alors $u_n + \tilde{u}_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$.

Démonstration. Par hypothèses, il existe deux fonctions ε et $\tilde{\varepsilon}$ définies sur un voisinage $\mathcal{V}$ de a telles que $f = \varepsilon g$ et $\tilde{f} = \tilde{\varepsilon} g$ sur $\mathcal{V} \cap D$, et $\lim_a \varepsilon = \lim_a \tilde{\varepsilon} = 0$. Alors $f + \tilde{f} = (\varepsilon + \tilde{\varepsilon})g$ sur $\mathcal{V} \cap D$ et, par somme, $\lim_a (\varepsilon + \tilde{\varepsilon}) = 0$. ■

Exemple 9 En admettant les égalités $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x)$ et $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$, alors

$$e^x + \sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} (1 + x + o(x)) + (x + o(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 2x + o(x) + o(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 2x + o(x).$$

Théorème 10 – Un petit o d'un petit o est un petit o

La relation « être négligeable » est transitive.

- **Fonctions.** Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et si $g \underset{a}{=} o(h)$, alors $f \underset{a}{=} o(h)$.
- **Suites.** Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ et si $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(w_n)$, alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(w_n)$.

Démonstration. Par hypothèses, il existe deux fonctions ε et η définies sur un voisinage $\mathcal{V}$ de a telles que $f = \varepsilon g$ et $g = \eta h$ au voisinage de a , avec $\lim_a \varepsilon = \lim_a \eta = 0$. Alors $f = \varepsilon \eta h$ et, par produit, $\lim_a \varepsilon \eta = 0$. ■

Exemple 11 En admettant l'égalité $e^{1/n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, alors, puisque $\frac{1}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$,

$$e^{1/n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Théorème 12 – Compatibilité avec le produit

- **Fonctions.** Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et si $\tilde{f} \underset{a}{=} o(\tilde{g})$, alors $f\tilde{f} \underset{a}{=} o(g\tilde{g})$.
Si $f \underset{a}{=} o(g)$, alors $f\tilde{h} \underset{a}{=} o(g\tilde{h})$.
- **Suites.** Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ et si $\tilde{u}_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(\tilde{v}_n)$, alors $u_n \tilde{u}_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n \tilde{v}_n)$.
Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$, alors $u_n w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n w_n)$.

Démonstration. Pour $f\tilde{f}$, on procède par produit, similairement à la somme. Pour $f\tilde{h}$ c'est évident par définition. ■

Exemple 13 En admettant les égalités $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x)$ et $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$, alors

$$\begin{aligned} e^x \sin x &\underset{x \rightarrow 0}{=} (1 + x + o(x)) \times (x + o(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x) + x^2 + 2xo(x) + o(x) \times o(x) \\ &\dots \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x) + \underbrace{x^2 + o(x^2) + o(x^2)}_{\underset{x \rightarrow 0}{=} o(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x). \end{aligned}$$

Théorème 14 – Substitution (ou composition à droite)

- **Fonctions.** Soit $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et φ une fonction définie au voisinage de b et à valeurs dans D . Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et si $\lim_b \varphi = a$, alors $f \circ \varphi \underset{b}{=} o(g \circ \varphi)$.
- **Fonctions bis.** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de D . Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$, alors $f(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(g(u_n))$.
- **Suites.** Soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une suite strictement croissante. Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$, alors $u_{\varphi(n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_{\varphi(n)})$.

Démonstration. Il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a et une fonction $\varepsilon : \mathcal{V}_a \cap D \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f = \varepsilon g$ sur $\mathcal{V}_a \cap D$ et $\lim_a \varepsilon = 0$. En outre, il existe un voisinage $\mathcal{V}_b$ de b tel que $\varphi[\mathcal{V}_b] \subset \mathcal{V}_a$. Alors, $f \circ \varphi = (\varepsilon \circ \varphi) \times (g \circ \varphi)$ sur $\mathcal{V}_b$ et $\lim_b \varepsilon \circ \varphi = 0$, par composition. ■

Exemple 15

- Puisque $\sqrt{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x)$, alors $\sqrt{\ln x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(\ln x)$, après substitution de x par $\ln x$, ayant $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.
- Si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, alors $u_n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(u_n)$, puisque $x^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x)$.
- Puisque $2^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(3^n)$, alors $2^{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(3^{n^2})$, avec $\varphi : n \mapsto n^2$.

Remarque 16 – Translation de a à 0 Dans le cas des fonctions avec $a \neq \pm\infty$, le théorème précédent permet en particulier de ramener par translation toute relation « $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ » au voisinage de a en une relation « $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} o(g(a+h))$ » au voisinage de 0, en substituant x par $a+h$, ayant $\lim_{h \rightarrow 0} (a+h) = a$.

 **En pratique**  Pour mener l'étude locale d'une fonction f au voisinage de a , avec $a \in \mathbb{R}^*$, on étudiera $f(a+h)$ au voisinage de 0.

✗ ATTENTION ! ✗ Il est FORMELLEMENT INTERDIT de composer à l'intérieur d'un petit o par la GAUCHE. Précisément, si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ et si $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, alors il est vrai que $h(f(x)) \underset{x \rightarrow a}{=} h(o(g(x)))$, mais il est en général faux que $h(f(x)) \underset{x \rightarrow a}{=} o(h(g(x)))$ (la fonction h ne peut pas « traverser » le petit o).

Par exemple, $\ln x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x)$, MAIS $\frac{1}{\ln x} \not\underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$.

2 Équivalence

2.1 Notion d'équivalence

Définition 17 – Équivalence

- **Fonctions.** Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D . On dit que f est équivalente à g au voisinage de a lorsqu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a et une fonction $\eta : \mathcal{V} \cap D \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathcal{V} \cap D, \quad f(x) = \eta(x)g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} \eta(x) = 1.$$

Le cas échéant, on note $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$.

- **Suites.** On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsqu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et une suite $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que

$$\forall n \geq N, \quad u_n = \eta_n v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \eta_n = 1.$$

Le cas échéant, on note $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.

Lorsque la fonction g ne s'annule pas au voisinage de a (resp. lorsque la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang), on dispose d'un critère plus simple pour l'équivalence, que l'on utilise la plupart du temps.

Théorème 18 – Critère d'équivalence

- **Fonctions.** Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D . On suppose que f et g ne s'annulent pas au voisinage de a – sauf peut-être en a toutes les deux. Alors

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

- **Suites.** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites. On suppose u_n et v_n non nuls à partir d'un certain rang. Alors

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Démonstration. Le sens direct est clair. Pour la réciproque, il suffit de poser $\eta(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ et $\eta_n = \frac{u_n}{v_n}$ respectivement. ■

Exemple 19 $x^2 + x + 5 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$, $x + x^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, $3^n + 2^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 3^n$.

Remarque 20 Lorsque l'on cherche un équivalent, le résultat ne doit JAMAIS se présenter comme une SOMME DE PLUSIEURS TERMES DE TAILLES DISTINCTES. Par exemple, si l'on souhaite un équivalent de $x - 3x^2 + x^5$ au voisinage de 0, il ne faut pas donner $x - 3x^2 + x^5 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x - 3x^2$. Cette relation est correcte, dans la mesure où $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 3x^2 + x^5}{x - 3x^2} = 1$, mais non abouti puisqu'il est encore possible de comparer x à x^2 et en l'occurrence $x^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x)$. L'équivalent pertinent est par conséquent $x - 3x^2 + x^5 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$. En résumé : IL NE DOIT EN RESTER QU'UN – le terme dominant.

Théorème 21 – La relation « être équivalente à » est une relation d'équivalence

Que l'on parle de fonctions au voisinage d'un point ou de suites, la relation « être équivalente à » est une relation d'équivalence, i.e. vérifie (avec des notations évidentes) les propriétés de

- **Réflexivité.** $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f(x)$.
- **Symétrie.** Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$, alors $g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f(x)$.
- **Transitivité.** Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x)$, alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x)$.

On dispose d'énoncés similaires pour les suites.

Démonstration. Exercice. ■

Lorsque $f \underset{a}{\sim} g$, la propriété de symétrie autorise notamment à dire que « les fonctions f et g sont équivalentes au voisinage de a ». Idem pour les suites.

2.2 Lien avec les petits o

En vue des théorèmes du présent paragraphe et des suivants, introduisons quelques objets une fois pour toutes :

- soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{f} : D \rightarrow \mathbb{R}$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{g} : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D ;
- soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\tilde{v}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites.

Théorème 22 – Lien petit o / équivalence

- **Fonctions.** $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \iff f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} g(x) + o(g(x))$.
- **Suites.** $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \iff u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} v_n + o(v_n)$.

Démonstration. Exercice. ■

Ce résultat essentiel indique qu' IL Y A TOUJOURS UN PETIT o DANS UNE ÉQUIVALENCE, un petit o caché qui contrôle l'approximation de f par g ou de u_n par v_n . En outre, ce théorème fournit une méthode simple pour déterminer un équivalent d'une somme.

Exemple 23 Soit $P : x \mapsto a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \dots + a_q x^q$ une fonction polynomiale, avec $p \leq q$ et $a_p a_q \neq 0$. Alors

$$P(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} a_p x^p \quad \text{et} \quad P(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} a_q x^q.$$

Au voisinage de 0 (resp. $\pm\infty$), P équivaut à son terme de plus bas (resp. haut) degré.

En effet, $a_{p+1} x^{p+1} + \dots + a_q x^q \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^p)$ et $a_p x^p + \dots + a_{q-1} x^{q-1} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^q)$.

2.3 Équivalents usuels

Les équivalents usuels en 0 résultent quasiment tous du théorème suivant.

Théorème 24

Soit a un réel. Si la fonction f est dérivable en a et si $f'(a)$ est NON NUL, alors $f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f'(a)(x - a)$.

Démonstration. La fonction $x \mapsto f'(a)(x - a)$ ne s'annulant qu'en a , on conclut grâce à $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{f'(a)(x - a)} = 1$. ■

Corollaire 25 – Équivalents usuels au voisinage de 0

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, & e^x - 1 &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, & (1+x)^\alpha - 1 &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x \quad (\alpha \in \mathbb{R}), & \text{en particulier } \sqrt{1+x} - 1 &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}, \\ \cos x - 1 &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}, & \operatorname{ch} x - 1 &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}, & \sin x &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, & \operatorname{sh} x &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, & \tan x &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, & \operatorname{th} x &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, \\ \operatorname{Arcsin} x &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, & \operatorname{Arccos} x - \frac{\pi}{2} &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x, & \operatorname{Arctan} x &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} x. \end{aligned}$$

Démonstration. Seuls les équivalents de $\cos x - 1$ et $\operatorname{ch} x - 1$ ne découlent pas du théorème précédent (pour $\alpha = 0$, notons que $0 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 0$). Pour ces derniers, il suffit de remarquer que, pour tout $x \neq 0$,

$$\frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \right)^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2} = \frac{2 \operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \right)^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$

Remarque 26 Il ne faut pas écrire $e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + x$, en lieu et place de $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$. Cette équivalence est correcte, mais puisque $x = o(1)$, écrire $e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + x$ revient à écrire $e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$, qui est un résultat moins précis. En effet, la précision de l'équivalent $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ est en $o(x)$, alors que celle de l'équivalent $e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + x$ est en $o(1)$.

La formule de Wallis n'est pas au programme, mais la formule de Stirling qui en découle l'est en revanche.

Théorème 27 – Formules de Wallis et de Stirling[†]

$$\text{(i) Formule de Wallis (HP).} \quad \binom{2n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}. \quad \text{(ii) Formule de Stirling.} \quad n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Démonstration. Admis conformément au programme. ■

[†]. John Wallis (1616 à Ashford – 1703 à Oxford) est un mathématicien anglais. Il mena des travaux sur le calcul différentiel précurseurs de ceux de Newton et introduisit le symbole ∞ de l'infini utilisé de nos jours. Il est également précurseur de la phonétique, de l'éducation des sourds et de l'orthophonie.

James Stirling (1692 à Garden – 1770 à Édimbourg) est un mathématicien écossais. Stirling publie son traité mathématique majeur, baptisé *Methodus Differentialis*, en 1730. Il s'intéresse à cette occasion à des problèmes très modernes, comme la vitesse de convergence d'une suite et l'accélération de la convergence des séries, et on y trouve notamment sa célèbre formule.

Remarque 28 La formule de Stirling est équivalente au développement asymptotique suivant

$$\ln(n!) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + \underbrace{\frac{\ln(2\pi)}{2}}_{=O(1)} + o(1).$$

En effet, la formule de Stirling mène aux équivalences

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = 1 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} \right) = 0 \iff \ln(n!) - \ln \left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1).$$

2.4 Propriétés conservées par équivalence

Théorème 29 – Lien limite/équivalence

- **Fonctions.**
 - (i) Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors soit f et g ont toutes les deux une limite en a , en l'occurrence la même, soit aucune de ces deux fonctions ne possède de limite en a .
 - (ii) Si ℓ un RÉEL NON NUL, alors $\lim_{a \rightarrow \ell} f = \ell \iff f \underset{a}{\sim} \ell$.
- **Suites.**
 - (i) Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, alors soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ont toutes les deux une limite, en l'occurrence la même, soit aucune de ces deux suites ne possède de limite.
 - (ii) Si ℓ un RÉEL NON NUL, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \iff u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ell$.

Démonstration. Exercice. ■

✗ **ATTENTION !** ✗

$$\begin{array}{ccc} \lim_{a \rightarrow \ell} f = \lim_{a \rightarrow \ell} g & \not\iff & f \underset{a}{\sim} g \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n & \not\iff & u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \end{array}$$

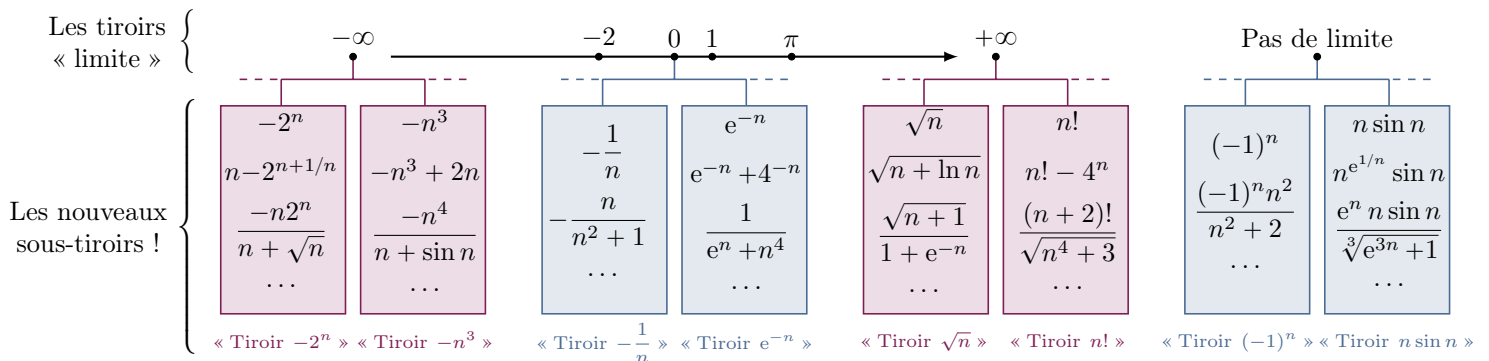
Ne pas comprendre ceci, c'est ne rien comprendre à ce chapitre.

Par exemple : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, mais $e^x \not\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$. Similairement : $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, mais $x^2 \not\underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.

Enfin : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, mais $2^n \not\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$.

En outre, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une limite, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}$, mais en général $u_{n+1} \not\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$, e.g. $u_n = 2^n$.

Remarque 30 Dans l'armoire des suites, la notion de limite crée des tiroirs qui permettent de réaliser un premier tri. Dans le « tiroir $+\infty$ » sont rangées toutes les suites de limite $+\infty$, dans le « tiroir 2 » toutes les suites de limite 2, ... et dans le « tiroir sans limite » toutes les suites sans limite. Or dans certains tiroirs, il serait intéressant que de nouveaux sous-tiroirs soient créés. Les suites $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$, $(n^2 + n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont toutes dans le « tiroir $+\infty$ » par exemple, mais on pressent bien que $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ portent des infinis de tailles différentes tandis que $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(n^2 + n)_{n \in \mathbb{N}}$ portent le même infini.



- D'après (i), deux fonctions ou suites qui sont dans le même « tiroir d'équivalence » sont aussi dans le même « tiroir-limite », de sorte que les « tiroirs-équivalence » sont effectivement des SOUS-tiroirs des « tiroirs-limite ». Les classes d'équivalence de la relation « être équivalente à » sont exactement ces sous-tiroirs.
- D'après (ii), pour tout $\ell \in \mathbb{R}^*$, TOUTE suite de limite ℓ est équivalente à la suite constante $(\ell)_{n \in \mathbb{N}}$, ainsi le « tiroir ℓ » n'a pas de sous-tiroir. Nous n'avons par conséquent créé des sous-tiroirs que pour quatre « tiroirs-limite » : le « tiroir $-\infty$ », le « tiroir 0 », le « tiroir $+\infty$ » et le « tiroir sans-limite ».

✗ **ATTENTION ! ✗** Il ne faut jamais écrire $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} 0$ (resp. $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 0$), cela n'a aucun sens ! Sauf dans le cas très particulier où f est nulle sur un voisinage de a (resp. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang).

Théorème 31 – Équivalent et signe

• **Fonctions.**

- (i) Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si g ne s'annule pas sur un voisinage de a , alors f ne s'annule pas sur un voisinage de a .
- (ii) Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors f et g sont de même signe au sens strict sur un voisinage de a .

• **Suites.**

- (i) Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ et si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang.
- (ii) Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont de même signe au sens strict à partir d'un certain rang.

Démonstration. Par hypothèse, $f = \eta g$ sur un voisinage de a et $\lim_a \eta = 1$. Ainsi, il existe un voisinage de a sur lequel $\eta > 0$, ce qui permet de conclure. ■

✗ **ATTENTION ! ✗** La monotonie n'est pas conservée par équivalence. On a par exemple, $1 + \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 - \frac{1}{n}$.

Théorème 32 – Fonction/suite équivalente dans un petit o

• **Fonctions.**

Si $f = o_a(g)$ et si $g \underset{a}{\sim} \tilde{g}$, alors $f = o_a(\tilde{g})$.

• **Suites.**

Si $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ et si $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \tilde{v}_n$, alors $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(\tilde{v}_n)$.

Démonstration. Exercice. ■

2.5 Opérations sur les équivalents

Théorème 33 – Compatibilité avec le produit, l'inverse, les puissances et la valeur absolue

• **Fonctions.**

Si $f \underset{a}{\sim} \tilde{f}$ et si $g \underset{a}{\sim} \tilde{g}$, alors $fg \underset{a}{\sim} \tilde{f}\tilde{g}$. Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $|f| \underset{a}{\sim} |g|$.

Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si f ne s'annule pas au voisinage de a , alors $\frac{1}{f} \underset{a}{\sim} \frac{1}{g}$.

Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si f est strictement positive au voisinage de a , alors $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

• **Suites.**

Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \tilde{u}_n$ et si $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \tilde{v}_n$, alors $u_n v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \tilde{u}_n \tilde{v}_n$. Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, alors $|u_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |v_n|$.

Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ et si u_n est non nul à partir d'un certain rang, alors $\frac{1}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{v_n}$.

Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ et si $u_n > 0$ à partir d'un certain rang, alors $u_n^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n^\alpha$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Exercice. ■

Exemple 34 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$.

Théorème 35 – Substitution (ou composition à droite)

• **Fonctions.**

Soit $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et φ une fonction définie au voisinage de b et à valeurs dans D .

Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $\lim_b \varphi = a$, alors $f \circ \varphi \underset{b}{\sim} g \circ \varphi$.

• **Fonctions bis.**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans D .

Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$, alors $f(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} g(u_n)$.

• **Suites.**

Soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante. Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, alors $u_{\varphi(n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_{\varphi(n)}$.

Démonstration. Exercice. ■

Exemple 36 Puisque $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, $\sin(\sin x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.

Exemple 37 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Exemple 38 $\sqrt{x^2 + \ln x} - x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln x}{2x}$, $\ln(\cos x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ et $x^{1/x} - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x}$.

✗ **ATTENTION ! ✗** Avec les équivalents, deux opérations sont FORMELLEMENT INTERDITES.

• **Somme.** $x + 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$ et $3 - x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1 - x$, MAIS $4 \not\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1$.

• **Composition à gauche.** $n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n + 1$, MAIS si l'on compose par $x \mapsto e^x$ à gauche, $e^n \not\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{n+1}$.

Théorème 39 – Théorème d'encadrement pour les équivalents

Avec des notations évidentes,

- **Fonctions.** Si $m(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} M(x)$ et si $m(x) \leq f(x) \leq M(x)$ au voisinage de a , alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} m(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} M(x)$.
- **Suites.** Si $m_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} M_n$ et si $m_n \leq u_n \leq M_n$ à partir d'un certain rang, alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} m_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} M_n$.

Démonstration. Exercice. ■

Exemple 40 – Résultat à connaître ! $\lfloor x \rfloor \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$.

3 Domination

Définition 41 – Domination

- **Fonctions.** Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D . La fonction f est dite *dominée par g au voisinage de a* lorsqu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a et une fonction BORNÉE $\theta : \mathcal{V} \cap D \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathcal{V} \cap D, \quad f(x) = \theta(x)g(x).$$

Le cas échéant, on note $f \underset{a}{=} O(g)$ ou $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x))$ (lire « f est un grand O de g au voisinage de a »).

- **Suites.** La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite *dominée par la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$* lorsqu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ et une suite BORNÉE $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que

$$\forall n \geq N, \quad u_n = \theta_n v_n.$$

Le cas échéant, on note $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$ (lire « u_n est un grand O de v_n »).

À nouveau, lorsque la fonction g ne s'annule pas au voisinage de a (resp. lorsque la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang), on dispose d'un critère plus simple pour la domination, que l'on utilise la plupart du temps.

Théorème 42 – Critère de domination

- **Fonctions.** Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D . Si g ne s'annule pas au voisinage de a (sauf peut-être en a avec dans ce cas $f(a) = 0$), alors $f \underset{a}{=} O(g)$ si et seulement si $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a .
- **Suites.** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites. Si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$ si et seulement si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Démonstration. Le sens direct est clair. Pour la réciproque, il suffit de poser $\theta(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ et $\theta_n = \frac{u_n}{v_n}$ respectivement. ■

Exemple 43 $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} O(x^2)$, $\cos x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(1)$, $(-1)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(1)$, $[e^n] \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(e^n)$.

On retiendra en particulier que pour les fonctions et les suites respectivement

$O(1)$ = « une fonction bornée au voisinage de a » et $O(1)$ = « une suite bornée ».

Théorème 44 – Lien grand O/petit o/équivalent

Avec des notations évidentes,

- **Fonctions.** Si $f \underset{a}{=} o(g)$ ou $f \underset{a}{\sim} g$, alors $f \underset{a}{=} O(g)$.
- **Suites.** Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ ou $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$.

Démonstration. Une fonction de limite égale à 0 ou 1 en a est bornée au voisinage de a . Idem pour les suites. ■

✗ **ATTENTION ! ✗** Les réciproques sont fausses ! La domination n'entraîne ni la négligeabilité, ni l'équivalence. Par exemple, $2x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(x^2)$, mais les relations $2x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^2)$ et $2x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$ sont fausses.

Exemple 45 Puisque $\cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, on a aussi $\cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + O(x^2)$. Ce résultat est plus fin qu'un développement limité à l'ordre 1, mais plus grossier qu'un développement limité à l'ordre 2.

Notons enfin que tous les résultats de la section 1.2 « Opérations sur les petits o » restent vrais avec des grands O en lieu et place des petits o .

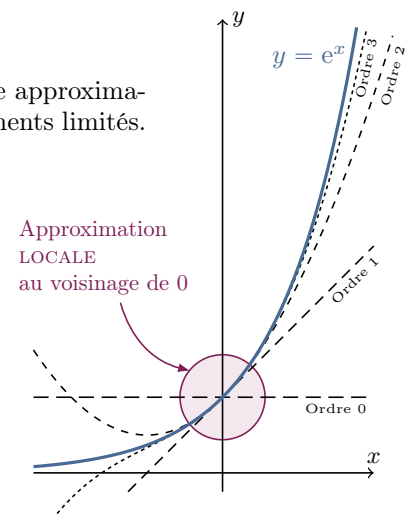
4 Développements limités

Nous introduisons dans cette section le principal outil pour la recherche d'une approximation polynomiale d'une fonction au voisinage d'un point : le calcul des développements limités.

4.1 Notion de développements limités

Nous allons par exemple montrer que : $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. Cette relation signifie que la fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 3 la plus proche de l'exponentielle au voisinage de 0 est la fonction $x \mapsto 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$.

Pour la même raison, puisque $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x)$, la fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 1 la plus proche de l'exponentielle au voisinage de 0 est la fonction $x \mapsto 1 + x$. On reconnaîtra bien sûr l'expression de la tangente à la courbe de la fonction exponentielle en 0.



Définition 46 – Développement limité

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \mathbb{R}$ adhérent à D et $n \in \mathbb{N}$. On dit que f possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de a (abrégé en $DL_n(a)$) lorsqu'il existe des réels $a_0, \dots, a_n$ pour lesquels :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

Observons que, plus n est grand, plus la quantité $(x-a)^n$ est petite au voisinage de a . Ainsi, plus n est grand, plus l'approximation de f obtenue au voisinage de a est précise.

Exemple 47 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$.

Théorème 48 – Unicité des coefficients d'un développement limité

En cas d'existence, la liste des coefficients d'un développement limité est unique.

Démonstration. ... ■

Remarque 49

- **Translation en 0.** Tout développement limité au voisinage de a peut être ramené à un développement limité au voisinage de 0. Précisément, si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$, alors, après composition à DROITE par la fonction $h \mapsto a+h$, $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1h + \dots + a_nh^n + o(h^n)$.

- **Troncature.** Supposons que l'on ait un développement limité de f à l'ordre n :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

On dispose alors d'un développement de f à tout ordre $m \leq n$:

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_m(x-a)^m + o((x-a)^m),$$

dans la mesure où $a_{m+1}(x-a)^{m+1} + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n) \underset{x \rightarrow a}{=} o((x-a)^m)$. Cette opération d'oubli des termes de degré compris entre $m+1$ et n est appelé *troncature à l'ordre m* .

Théorème 50 – Développement limité en 0 vs parité/impairité

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que 0 est adhérent à D et que D est symétrique par rapport à 0.

- (i) Si f est paire et possède un développement limité AU VOISINAGE DE 0, alors les coefficients de rang impair sont nuls – seuls les termes $1, x^2, x^4, x^6, \dots$ apparaissent réellement.
- (ii) Si f est impaire et possède un développement limité AU VOISINAGE DE 0, alors les coefficients de rang pair sont nuls – seuls les termes $x, x^3, x^5, x^7, \dots$ apparaissent réellement.

Démonstration. ...

Le résultat qui suit est une conséquence immédiate des définitions de la continuité et de la dérivabilité en un point.

Théorème 51 – Développement limité vs continuité/dérivabilité

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.

- (i) f est continue en a si et seulement si f possède un développement limité à l'ordre 0 au voisinage de a .
Précisément, le cas échéant : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + o(1)$.
- (ii) f est dérivable en a si et seulement si f possède un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de a .
Précisément, le cas échéant : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$.

Dans un développement limité de f au voisinage de a ,
le coefficient d'ordre 0 est TOUJOURS $f(a)$ et le coefficient d'ordre 1 TOUJOURS $f'(a)$.

Le point (ii) du théorème formalise l'idée qu'au voisinage d'un point a en lequel une fonction f est dérivable, la tangente en a est la droite qui approche le mieux la courbe de f . On dit que la tangente est une *approximation affine* de la courbe d'une fonction f au voisinage du point d'abscisse a .

4.2 Primitivation des développements limités**Lemme 52 – Lemme de primitivation des développements limités**

Soit $g \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. Si $g'(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o((x-a)^n)$, alors $g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} g(a) + o((x-a)^{n+1})$.

« Constante de primitivation »

Démonstration. Pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, g est continue sur $[a, x]$ (resp. $[x, a]$) et dérivable sur $]a, x[$ (resp. $]x, a[$), ainsi, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in]a, x[$ (resp. $]x, a[$) tel que $\frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(c_x)$. On obtient de cette manière une fonction $c : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, $|c_x - a| < |x - a|$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow a} c_x = a$ et

$$\left| \frac{g(x) - g(a)}{(x-a)^{n+1}} \right| = \left| \frac{g'(c_x)}{(x-a)^n} \right| = \underbrace{\left| \frac{g'(c_x)}{(c_x - a)^n} \right|}_{\xrightarrow{x \rightarrow a} 0} \times \underbrace{\left| \frac{(c_x - a)^n}{(x - a)^n} \right|}_{\leq 1} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$$

Il est toujours possible de primitiver termes à termes le développement limité d'une dérivée.

Théorème 53 – Primitivation des développements limités

Soit $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$. Si f' possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de a

$$f'(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, alors f possède un développement limité à l'ordre $n+1$ au voisinage de a

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} (x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1}).$$

« Constante de primitivation »

Démonstration. La fonction $g : x \mapsto f(x) - f(a) - \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} (x-a)^{k+1}$ est dérivable sur I de dérivée la fonction

$$g' : x \mapsto f'(x) - \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k.$$

Or, par hypothèse, $g'(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o((x-a)^n)$, ainsi, d'après le lemme précédent, $g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} g(a) + o((x-a)^{n+1})$, avec $g(a) = 0$. ■

Exemple 54

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\operatorname{Arctan} x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}).$$

✗ **ATTENTION ! ✗** On ne peut pas en général dériver un développement limité, la dérivation du terme résiduel $o((x-a)^n)$ (sous réserve qu'il puisse l'être) ne donnant pas nécessairement un terme en $o((x-a)^{n-1})$.

Exemple 55 Pour tout $x > 0$, $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$ et f admet un $\text{DL}_2(0)$. Cependant, en dérivant, on obtient

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\not=} o(x),$$

dans la mesure où $\frac{f'(x)}{x} = 3x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ ne tend pas vers 0 lorsque x tend vers 0

4.3 Formule de Taylor-Young

Théorème 56 – Formule de Taylor-Young[†]

Soit $a \in I$. Si $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$, alors f possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de a . Précisément :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k}_{\text{polynôme de Taylor de } f \text{ en } a \text{ à l'ordre } n} + o((x-a)^n).$$

Démonstration. ...

La formule de Taylor-Young est avant tout un théorème d'EXISTENCE de développements limités. À ce sujet, nous disposons dorénavant de deux équivalences et d'une IMPLICATION (seulement, la fonction de l'exemple 55 n'est pas deux fois dérivable en 0) :

Continuité	$\Longleftrightarrow$	Existence d'un développement limité à l'ordre 0
Dérivabilité	$\Longleftrightarrow$	Existence d'un développement limité à l'ordre 1
Classe $\mathcal{C}^n$	$\implies$	Existence d'un développement limité à l'ordre n

Exemple 57 Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

Exemple 58 Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Remarque 59 Observons que ce développement limité de $(1+x)^\alpha$ au voisinage de 0 découle directement de la formule du binôme lorsque $\alpha \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, en effet, pour tout $k \in \llbracket 0, \alpha \rrbracket$, $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$.

Ainsi, lorsque l'on cherche un développement limité de $(1+x)^5$ à l'ordre 3 au voisinage de 0, on utilise simplement la formule du binôme :

$$(1+x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + \underbrace{5x^4 + x^5}_{o(x^3)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + o(x^3).$$

Exemple 60 Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\ \cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \end{aligned}$$

Exemple 61 $\tan x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$.

La formule générale du développement limité de tangente à tout ordre au voisinage de 0 est compliquée (elle fait intervenir les nombres de Bernoulli) et hors programme.

 **En pratique**  **(Dérivation des développements limités)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$.

D'après la formule de Taylor-Young, f possède au voisinage de a un développement limité à l'ordre n et f' un développement limité à l'ordre $n-1$ avec

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n) \quad \text{et} \quad f'(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^{n-1}).$$

Dans cette situation, tout se passe comme si le développement limité de f' à l'ordre $n-1$ était obtenu à partir de la dérivation terme à terme de celui de f à l'ordre n .

†. Brook Taylor (1685 à Edmonton – 1731 à Londres) est un mathématicien anglais à l'origine des développements qui portent aujourd'hui son nom et de la formule d'intégration par partie.

William Henry Young (1863 à Londres - 1942 à Lausanne) est un mathématicien anglais, auteur de la présente formule et ayant contribué à divers domaines de l'analyse (théorie de la mesure, séries de Fourier, calcul différentiel et analyse complexe notamment).

Exemple 62 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(1-x)^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (k+1)x^k + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + (n+1)x^n + o(x^n)$.

En effet, puisque $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -\infty, 1[$, il suffit de dériver son développement limité à l'ordre $n+1$ au voisinage de 0, à savoir : $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{n+1} x^k + o(x^{n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^{n+1} + o(x^{n+1})$.

4.4 Développements limités usuels en 0

Les formules du tableau ci-après doivent être connues sans aucune hésitation ! Elles résultent essentiellement, comme l'ont montré les exemples précédents, de la formule de Taylor-Young et de la règle de primitivation.

$\frac{1}{1-x}$	$\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$
$\ln(1+x)$	$\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
$\text{Arctan } x$	$\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$
e^x	$\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\text{sh } x$	$\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
$\text{ch } x$	$\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
$\sin x$	$\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
$\cos x$	$\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
$\tan x$	$\underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
$(1+x)^\alpha$	$\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$

Exercice 63 Obtenir les développements limités de $\frac{1}{1-x}$ et $\ln(1+x)$ à l'aide de la formule de Taylor-Young.

Remarque 64

- Pour les fonctions paires (resp. impaires), les développements limités sont donnés à l'ordre $2n$ (resp. $2n+1$), pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut cependant en déduire directement des développements limités à l'ordre $2n+1$ (resp. $2n+2$) par parité. Par exemple, $\cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$. Notons que ce développement limité est plus fin que celui à l'ordre 2 : $\cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ – les niveaux de précision n'étant tout simplement pas les mêmes.
- Les développements limités des fonctions ch et sh sont respectivement les parties paire et impaire de celui de la fonction exponentielle.

4.5 Opérations sur les développements limités

La formule de Taylor-Young, qui nécessite la recherche des dérivées successives d'une fonction dont le calcul est souvent pénible, est rarement la méthode à privilégier pour le calcul effectif du développement limité d'une fonction. On préférera le plus souvent utiliser les résultats développés dans cette partie qui permettent d'obtenir un développement limité comme somme, produit, quotient ou composition d'autres développements limités.

Définition 65 – Troncature d'une fonction polynomiale

Soit $f : x \mapsto a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ une fonction polynomiale de degré n . Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on appelle *troncature de f à l'ordre p* la fonction notée $T_p(f)$:

$$T_p(f) : x \mapsto \begin{cases} a_0 + a_1x + \dots + a_px^p & \text{si } p < n, \\ f(x) & \text{si } p \geq n. \end{cases}$$

Les calculs effectifs de développements limités s'effectuant en 0, les règles opératoires sur les développements limités sont énoncées au voisinage de 0 (cf. remarque 76 pour un voisinage d'un point a quelconque). Le théorème suivant dégage notamment un des mérites des développements limités par rapport aux équivalents : la somme de deux développements limités est licite ! En revanche, ce théorème est essentiellement sans intérêt en pratique et il convient avant tout de comprendre les stratégies de calculs mises en œuvre dans les exemples qui vont suivre.

Théorème 66 – Règles opératoires sur les développements limités

Soit $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions admettant des développements limités à l'ordre n AU VOISINAGE DE 0 :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \underbrace{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}_{P(x)} + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \underbrace{b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n}_{Q(x)} + o(x^n).$$

- **Troncature.** Pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, f admet un développement limité à l'ordre p au voisinage de 0, obtenu en tronquant à l'ordre p celui connu à l'ordre n :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1x + \dots + a_px^p + o(x^p) \underset{x \rightarrow 0}{=} T_p(P)(x) + o(x^p).$$

- **Somme et produit.** Les fonctions $f + g$ et fg admettent des développements limités à l'ordre n au voisinage de 0 qui s'écrivent :

$$f(x) + g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + Q(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad f(x)g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} T_n(PQ)(x) + o(x^n),$$

- **Multiplication par une puissance.** Pour tout entier $p \in \mathbb{Z}$, $x \mapsto x^p f(x)$ admet un développement asymptotique à l'ordre $n + p$ au voisinage de 0 :

$$x^p f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0x^p + a_1x^{p+1} + \dots + a_nx^{n+p} + o(x^{n+p}).$$

On parle ici de développement asymptotique en lieu et place de développement limité, dans la mesure où les puissances de x peuvent être négative.

- **Quotient.** Si $\lim_{x \rightarrow 0} g \neq 0$, alors la fonction f/g admet un développement limité à l'ordre n en 0.
- **Composition.** Si $\lim_{x \rightarrow 0} f = 0$ et si $n \geq 1$, alors $g \circ f$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 :

$$g \circ f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} T_n(Q \circ P) + o(x^n).$$

Démonstration. Exercice. Découle essentiellement des propriétés opératoires des petits o vues au paragraphe 1.2. ■

 **En pratique**  Les règles pour la somme et le produit de développements limités énoncent que :

- Si f et g admettent des développements limités à l'ordre n en 0, alors leur somme aussi et ce développement limité est obtenu en sommant les développements limités de f et g .
- Si f et g admettent des développements limités à l'ordre n en 0, alors leur produit aussi et ce développement limité est obtenu en multipliant les développements limités de f et g et en ne conservant que les monômes de degré inférieur ou égal à n . Nous allons toutefois voir qu'il est possible d'être plus efficace !

Exemple 67 – Somme $\frac{1}{1-x} - e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3).$

Exemple 68 – Produit $\frac{\cos x}{\sqrt{1+x}} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^3).$

Exemple 69 – Multiplication par une puissance $e^x \frac{\sin x}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{3} + o(x^3).$

 **En pratique**  **(Prévision des ordres de développement)** Étant données deux fonctions f et g vérifiant

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} a_p x^p \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} b_q x^q,$$

avec $p + q \leq n$ et $a_p b_q \neq 0$, pour obtenir un développement limité à l'ordre n du produit fg , il suffit de se donner des développements limités de f à l'ordre $n - q$ et de g à l'ordre $n - p$ respectivement. En effet,

$$\begin{aligned} (a_p x^p + \dots + o(x^{n-q})) (b_q x^q + \dots + o(x^{n-p})) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x^{p+q} \left(a_p + \dots + o(x^{n-(p+q)}) \right) \left(b_q + \dots + o(x^{n-(p+q)}) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x^{p+q} \left(a_p b_q + \dots + o(x^{n-(p+q)}) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} (a_p b_q x^{p+q} + \dots + o(x^n)). \end{aligned}$$

Exemple 70 – Produit bis $(1 - \operatorname{ch} x) \sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} + o(x^6) \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}^4 x \underset{x \rightarrow 0}{=} x^4 + \frac{2x^6}{3} + o(x^7).$

Exemple 71 – Composition (niveau 1) $e^{\sin x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3).$

Exemple 72 – Composition (niveau 2) $\ln(\cos x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^6).$

 **En pratique**  **(Développement limité d'un quotient)**

Soit g une fonction admettant un développement limité à l'ordre n en 0 et telle que $\lim_0 g \neq 0$. Notons P le polynôme de degré au plus n tel que $g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n)$. On a alors $P(0) = \lim_0 g \neq 0$ et en mettant le terme constant non nul de P en facteur, il existe un polynôme R de degré au plus n tel que $P = P(0)(1 \pm R)$. Il suffit alors de substituer R à u dans un développement limité (d'ordre au plus n) de $\frac{1}{1 \pm u}$ en 0.

Exemple 73 – Quotient $\frac{1}{\cos x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5) \quad \text{et} \quad \tan x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6).$

Remarque 74 Si $\lim_0 g = 0$ et $g(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} a_p x^p$, avec $p \geq 1$ et $a_p \neq 0$, on peut alors déterminer un développement limité en 0 de $\frac{x^p}{g(x)}$, puis diviser le résultat obtenu par x^p pour obtenir un développement asymptotique de g .

Exemple 75 – Quotient bis $\frac{1}{\sin x - x} \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{6}{x^3} - \frac{3}{10x} - \frac{11}{1400}x + o(x).$

Remarque 76 – Développements limités en a Les règles de calcul pour les développements limités du théorème 66 restent valables *mutatis mutandis* pour des fonctions admettant des développements limités au voisinage d'un point a . En pratique, pour une fonction f définie au voisinage de a , il suffit de considérer la fonction $h \mapsto f(a + h)$ pour se ramener à un développement limité au voisinage de 0.

Exemple 77 – Développement limité en 2 $\ln x \underset{x \rightarrow 2}{=} \ln 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(x-2)^3}{24} + o((x-2)^3).$

5 Applications

5.1 Recherche d'équivalents, calcul de limites

Contrairement aux équivalents, les développements limités sont compatibles avec les sommes. Ainsi, pour obtenir un équivalent d'une somme de fonctions/suites, on pourra commencer par en déterminer un développement limité, comme le précise le point suivant.

 **En pratique**  **(Recherche d'équivalents)** Si une fonction f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a de la forme $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_p(x-a)^p + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$, avec $a_p \neq 0$, alors

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} a_p(x-a)^p.$$

Exemple 78 $\tan x - \sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^3}{2}.$

Exemple 79 $\ln(1+x^2) - \sin^2 x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^4}{6}.$

Exemple 80 $e^{\tan x} - \sqrt{1+x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$

Exemple 81 $\frac{\ln(n+1)}{n} - \frac{\ln n}{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n^2}.$

Exemple 82 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{\pi}{2} e^{1/n} - \operatorname{Arccos} \left(\frac{1}{n} \right) \right) = \frac{\pi}{2} + 1.$

Exemple 83 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+10x} - \sqrt[3]{1+6x}}{\sin x - \ln(1+x)} = -8.$

5.2 Position locale d'une courbe par rapport à sa tangente

L'existence d'une tangente non verticale au point d'abscisse a du graphe d'une fonction f équivaut à la dérivabilité de f en a , i.e. l'existence d'un développement limité à l'ordre 1 de f au voisinage de a . Le cas échéant, l'étude du signe de

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$$

permet de préciser localement la position de la courbe par rapport à cette tangente.

 **En pratique**  **Position d'une courbe par rapport à sa tangente.**

Si en a on dispose d'un développement limité de f à l'ordre p de la forme

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_p(x-a)^p + o((x-a)^p) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + a_p(x-a)^p + o((x-a)^p)$$

avec $p \geq 2$ et $a_p \neq 0$, alors la tangente de f en a est la droite d'équation $y = a_0 + a_1(x-a)$ et la position de la courbe de f par rapport à cette tangente (au voisinage de a) est donnée par le signe de $a_p(x-a)^p$, puisque

$$f(x) - a_0 - a_1(x-a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} a_p(x-a)^p.$$

- Si p est pair, $x \mapsto a_p(x-a)^p$ a le signe de a_p , ainsi f est situé au-dessus (resp. en-dessous) de sa tangente en a au voisinage de a lorsque $a_p > 0$ (resp. $a_p < 0$).
- Si p est impair, $x \mapsto a_p(x-a)^p$ change de signe en a , ainsi le graphe de f traverse sa tangente en a . On dit que f possède un *point d'inflexion* en a .

Exemple 84 La tangente de la fonction arctangente en 1 est la droite d'équation $y = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1)$ et la courbe est située au-dessous de sa tangente au voisinage de 1.

5.3 Asymptote d'une fonction en $\pm\infty$

Définition 85 – Asymptote d'une fonction en $\pm\infty$

Soit f une fonction réelle définie au voisinage de $+\infty$ et $a, b \in \mathbb{R}$. On dit que f admet la droite d'équation $y = ax + b$ pour asymptote au voisinage de $+\infty$ lorsque $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} ax + b + o(1)$.

On définit de même la notion de droite asymptote au voisinage de $-\infty$.

Remarque 86 Si f admet la droite d'équation $y = ax + b$ pour asymptote au voisinage de $+\infty$, alors

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$$

et l'étude du signe de $f(x) - ax - b$ permet de préciser la position de la courbe de f par rapport à son asymptote.

Exemple 87

- La fonction $x \mapsto \frac{x^3 + \lfloor x \rfloor^2}{x^2 + 2}$ admet la droite d'équation $y = x + 1$ pour asymptote au voisinage de $\pm\infty$.
- La fonction $x \mapsto \frac{x}{1 + e^{1/x}}$ admet la droite d'équation $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ pour asymptote au voisinage de $\pm\infty$ et son graphe est situé au-dessus de cette asymptote au voisinage de $\pm\infty$.

5.4 Condition suffisante du second ordre pour un extremum local

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Rappelons qu'une abscisse a est un *point critique* de f lorsque f est dérivable en a avec $f'(a) = 0$. Au chapitre 19, le théorème 29 énonce une condition NÉCESSAIRE pour l'existence d'un extremum local pour une fonction dérivable en un point intérieur d'un intervalle, condition qui permet de circonscrire les points en lesquels une telle fonction est susceptible de posséder un extremum local. Nous énonçons maintenant une condition suffisante du second ordre (*i.e.* en lien avec la dérivée seconde).

Théorème 88 – Condition suffisante du second ordre pour un extremum local en un point intérieur

Soit I un intervalle, $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ et a un point INTÉRIEUR de I . Si a est un point critique de f et si $f''(a) \neq 0$, alors f admet un extremum local en a . Précisément, un maximum local si $f''(a) < 0$, et un minimum local si $f''(a) > 0$.

Démonstration. D'après la formule de Taylor-Young, f admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de a de la forme

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + o((x-a)^2),$$

puisque $f'(a) = 0$. On a donc $f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$ et la différence $f(x) - f(a)$ est de signe constant (celui de $f''(a)$) au voisinage de a . ■

En pratique Synthèse pour l'étude des extrema d'une fonction.

- **Sur un segment.** Le théorème des bornes atteintes affirme l'existence d'un minimum et d'un maximum GLOBAL pour une fonction CONTINUE sur un SEGMENT.
- **Sur un intervalle ouvert.** Il est possible de localiser les éventuels extrema LOCAUX d'une fonction DÉRIVABLE (ce sont des points critiques d'après la condition nécessaire du premier ordre – théorème 29 du chapitre 19). La condition suffisante du second ordre pour une fonction de CLASSE $\mathcal{C}^2$ garantit alors leur existence.

6 Méthodes classiques

6.1 Équivalents en cas de composition par les fonctions ln et exp

En pratique

- Pour obtenir un équivalent de $\ln(u_n)$, on distingue deux cas :
 1. si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, il suffit d'utiliser l'équivalent classique de $\ln(1+x)$ en 0 ;
 2. sinon, on écrit u_n sous la forme $v_n(1+o(1))$ et on compare les deux termes obtenus en découpant le logarithme :

$$\ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(v_n) + \ln(1+o(1)).$$

Autrement dit, il s'agit de mettre le terme prépondérant en facteur dans le logarithme afin de l'isoler.

- Pour obtenir un équivalent de e^{u_n} , il suffit de se donner un développement de u_n à l'ordre $o(1)$.

En effet, si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} v_n + o(1)$, alors $e^{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{v_n + o(1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{v_n} e^{o(1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{v_n}$, puisque $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$.

Ces deux stratégies s'adaptent évidemment aux cas des fonctions.

Exemple 89 $\ln\left(\sin \frac{1}{n}\right)_{n \rightarrow +\infty} \sim -\ln n$ et $\exp\left(\frac{5}{x} + \frac{\ln(1+x)}{x^2}\right)_{x \rightarrow 0} \sim \frac{e^{6/x}}{\sqrt{e}}.$

6.2 Développement limité d'une réciproque

 **En pratique**  Si f est une fonction bijective (a minima injective au voisinage de 0) de classe $\mathcal{C}^n$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$, alors f^{-1} admet un développement limité à l'ordre n en 0 et ce dernier peut être déterminé via l'identification des développements limités

$$x = f^{-1} \circ f(x) + o(x^n)$$

qui fournit $n+1$ équations dont les inconnues sont les coefficients du développement limité de f^{-1} . Cette identification est légitime en vertu de l'unicité des coefficients d'un développement limité.

Exemple 90 La fonction $f : x \mapsto x \cos x$ est injective sur un voisinage de 0 et $f^{-1}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{2} + o(x^3).$

6.3 Suites récurrentes

Dans l'exemple qui suit, les termes du développement asymptotique sont obtenus les uns après les autres du plus grand au plus petit selon un principe itératif. À chaque fois qu'on vient d'obtenir un certain niveau de précision, on réinjecte le tout dans la relation de récurrence et on obtient ainsi un nouveau terme à un niveau de précision supérieur. En théorie, on peut obtenir de cette manière une précision aussi fine que voulu, toutefois plus on avance, plus les calculs deviennent laborieux.

Exemple 91 On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n - \frac{1}{2} - \frac{3}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

6.4 Solutions d'équations définies implicitement

La stratégie à l'œuvre est similaire à celle utilisée pour les suites récurrentes.

Exemple 92 Pour tout $\varepsilon > 0$, l'équation $e^{-\varepsilon x} = x$, d'inconnue x , possède une unique solution x_ε dans $\mathbb{R}_+$ et

$$x_\varepsilon \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} 1 - \varepsilon + \frac{3\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2).$$

Exemple 93 Pour tout $\lambda \geq 0$, le polynôme $X^4 + X^3 - \lambda^4$ possède une et une seule racine x_λ dans $\mathbb{R}_+$ et

$$x_\lambda \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{=} \lambda - \frac{1}{4} + \frac{3}{32\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Compétences à acquérir

- Établir des relations de négligeabilité : exercices 1 à 4.
- Calculer des équivalents et application aux calculs de limites : exercices 8 et 9.
- Déterminer un équivalent d'une suite définie implicitement : exercices 11 et 12.
- Calculer des DL : exercices 13 à 19.
- Obtenir un équivalent via un calcul de DL : exercices 20 à 23.
- Étudier localement/asymptotiquement une fonction via un calcul de DL : exercices 24 à 29 et 31.
- Obtenir un équivalent ou un développement asymptotique d'une suite définie par récurrence ou implicitement : exercices 32 à 39.

Quelques résultats classiques :

- Équivalent de $\binom{n}{k}$ pour n au voisinage de $+\infty$ (exemple 34).
- Équivalent de la partie entière (exemple 40).
- DL à l'ordre n de $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ et Arcsin (exercice 18).