16 Limites et continuité des fonctions

Dans l'ensemble de ce chapitre, les lettres D et E désigneront des parties quelconques de $\mathbb{R}$.

À l'instar des suites, la notion de limite pour les fonctions repose sur celle de voisinage, qui a été introduite à la définition 24 du chapitre 9.

1 Limite d'une fonction

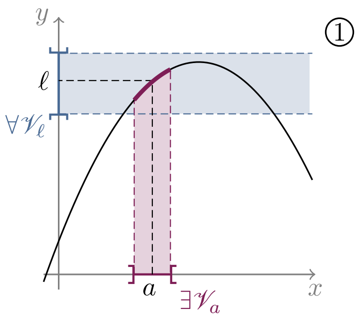
1.1 Limite d'une fonction en un point

Définition 1 – Limite d'une fonction en un point

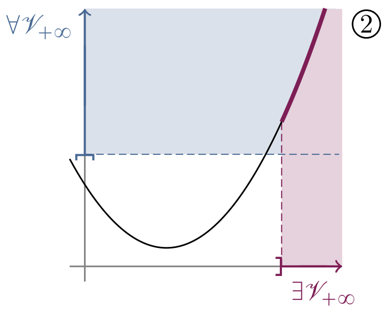
Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f *admet ℓ pour limite en a* lorsque :

$$\boxed{\text{pour tout voisinage } \mathscr{V}_\ell \text{ de } \ell, \text{ il existe un voisinage } \mathscr{V}_a \text{ de } a \text{ tel que : } \quad \forall x \in D \cap \mathscr{V}_a, \quad f(x) \in \mathscr{V}_\ell.}$$

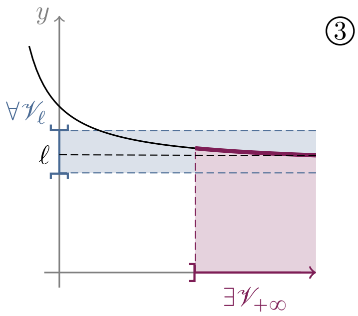
Ainsi f admet ℓ pour limite en a lorsque $f(x)$ reste aussi proche de ℓ que souhaité, à condition que x soit suffisamment proche de a, ce que nous illustrons par les dessins ci-dessous pour diverses situations.



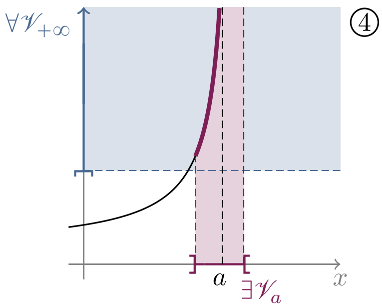
$\lim_a f = \ell$, avec $\ell \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$



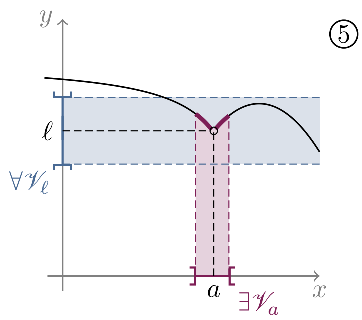
$\lim_{+\infty} f = +\infty$



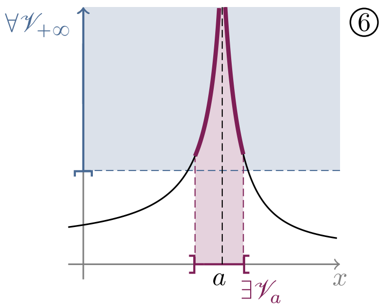
$\lim_{+\infty} f = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$



$\lim_a f = +\infty$ avec $a \in \mathbb{R}$



$\lim_a f = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$



$\lim_a f = +\infty$ avec $a \in \mathbb{R}$

Remarque 2 Les dessins ⑤ et ⑥ correspondent au cas où D est une réunion d'intervalles et où a est à la jonction de deux de ces intervalles sans appartenir au domaine de définition. La limite en un tel a, lorsqu'elle existe, peut être finie ou infinie.

Théorème 3 – Unicité de la limite

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D.

(i) Si f possède une limite en a, elle est unique et notée $\lim_a f$ ou $\lim_{x \to a} f(x)$.

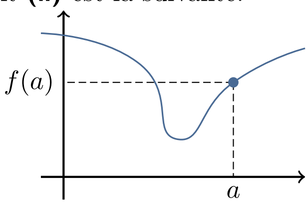
Pour tout $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, la relation $\quad \lim_a f = \ell \quad$ est aussi notée $\quad f \underset{a}{\longrightarrow} \ell \quad$ ou $\quad f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

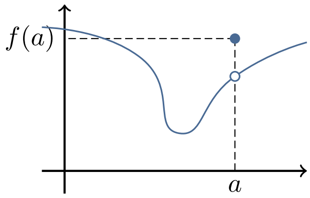
(ii) $\boxed{\text{Si } a \in D}$ et si f possède une limite en a, alors $\quad \lim_a f = f(a) \quad$ (dessin ①).

Démonstration. Cf. annexe A. ∎

La traduction du point **(ii)** est la suivante.

f est définie en a et $\lim\limits_a f = f(a)$.





f est définie en a mais $\lim\limits_a f$ n'existe pas. Nous verrons toutefois que $\lim\limits_{a^-} f = \lim\limits_{a^+} f$.

La définition précédente de la limite d'une fonction en un point se décline sous forme d'assertions quantifiées, selon le caractère fini ou infini de a et de ℓ.

Définition 4 – Les 9 versions de limites

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

- **Cas où $\ell \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$:**
$$\lim_a f = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\quad \exists \eta > 0,\quad \forall x \in D,\quad |x-a| < \eta \implies |f(x)-\ell| < \varepsilon.$$
- **Cas où $\ell = +\infty$ et $a = +\infty$:**
$$\lim_{+\infty} f = +\infty \iff \forall A > 0,\quad \exists B > 0,\quad \forall x \in D,\quad x > B \implies f(x) > A.$$
- **Cas où $\ell = -\infty$ et $a = +\infty$:**
$$\lim_{+\infty} f = -\infty \iff \forall A < 0,\quad \exists B > 0,\quad \forall x \in D,\quad x > B \implies f(x) < A.$$
- **Cas où $\ell = +\infty$ et $a = -\infty$:**
$$\lim_{-\infty} f = +\infty \iff \forall A > 0,\quad \exists B < 0,\quad \forall x \in D,\quad x < B \implies f(x) > A.$$
- **Cas où $\ell = -\infty$ et $a = -\infty$:**
$$\lim_{-\infty} f = -\infty \iff \forall A < 0,\quad \exists B < 0,\quad \forall x \in D,\quad x < B \implies f(x) < A.$$
- **Cas où $\ell \in \mathbb{R}$ et $a = +\infty$:**
$$\lim_{+\infty} f = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\quad \exists B > 0,\quad \forall x \in D,\quad x > B \implies |f(x)-\ell| < \varepsilon.$$
- **Cas où $\ell \in \mathbb{R}$ et $a = -\infty$:**
$$\lim_{-\infty} f = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\quad \exists B < 0,\quad \forall x \in D,\quad x < B \implies |f(x)-\ell| < \varepsilon.$$
- **Cas où $\ell = +\infty$ et $a \in \mathbb{R}, a \notin D$:**
$$\lim_a f = +\infty \iff \forall A > 0,\quad \exists \eta > 0,\quad \forall x \in D,\quad |x-a| < \eta \implies f(x) > A.$$
- **Cas où $\ell = -\infty$ et $a \in \mathbb{R}, a \notin D$:**
$$\lim_a f = -\infty \iff \forall A < 0,\quad \exists \eta > 0,\quad \forall x \in D,\quad |x-a| < \eta \implies f(x) < A.$$

Remarque 5 À l'instar des définitions données pour les suites, on peut remplacer dans les définitions précédentes les inégalités strictes des implications par des inégalités larges.

Exemple 6 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$

En effet, nous devons établir que : $\forall \varepsilon > 0,\quad \exists A > 0,\quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad x > A \implies \left|\frac{1}{\sqrt{x}} - 0\right| < \varepsilon.$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}} - 0\right| = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\sqrt{x}} < \varepsilon \iff \sqrt{x} > \frac{1}{\varepsilon} \iff x > \frac{1}{\varepsilon^2}.$$
Posons alors $A = \frac{1}{\varepsilon^2}$. D'après ce qui précède : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad x > A \implies \left|\frac{1}{\sqrt{x}} - 0\right| < \varepsilon.$

Le résultat qui suit est l'analogue de celui concernant les suites convergentes.

Théorème 7 – Limite finie et caractère localement bornée

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D. Si f possède une limite FINIE en a, alors f est bornée au voisinage de a.

Démonstration. Par hypothèse, il existe un voisinage $\mathscr{V}_a$ de a sur lequel $|f(x)-\ell| < 1$. En particulier,
$$\forall x \in D \cap \mathscr{V}_a,\quad |f(x)| = |f(x) - \ell + \ell| \leqslant |f(x)-\ell| + |\ell| \leqslant |\ell| + 1,$$
ce qui établit que f est bornée sur $D \cap \mathscr{V}_a$. ∎

1.2 Limite d'une fonction à gauche/à droite en un point

Définition-théorème 8 – Limite d'une fonction à gauche/à droite en un point

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \mathbb{R}$ adhérent à D et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose f définie au voisinage de a à gauche/à droite.

- On dit que f *admet ℓ pour limite à gauche en a* lorsque $f|_{D\cap]-\infty,a[}$ admet ℓ pour limite en a. En tant que limite, la limite de f en a à gauche, si elle existe, est unique et notée $\lim\limits_{a^-} f$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$.
  Plus concrètement, $\lim\limits_{a^-} f = \ell$ lorsque

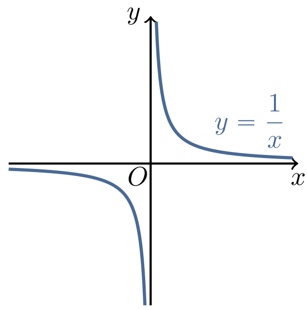
  × **Cas où $\ell \in \mathbb{R}$.** $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in D, \quad a - \eta < x < a \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$
  × **Cas où $\ell = +\infty$.** $\forall A > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in D, \quad a - \eta < x < a \implies f(x) > A.$
  × **Cas où $\ell = -\infty$.** $\forall A < 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in D, \quad a - \eta < x < a \implies f(x) < A.$

- On définit de même la notion de *limite à droite en a* en considérant la restriction $f|_{D\cap]a,+\infty[}$. Si elle existe, cette limite est notée $\lim\limits_{a^+} f$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$.

Exemple 9 Cette notion s'illustre aisément avec la très classique fonction inverse $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*, x \longmapsto \dfrac{1}{x}$, pour laquelle

$$\lim_{0^-} f = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{0^+} f = +\infty.$$

Notamment la fonction inverse n'admet pas de limite en 0, dans la mesure où ses limites à gauche et à droite en 0 ne coïncident pas.



Théorème 10 – Caractérisation de la limite via les limites à gauche/à droite

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \mathbb{R}$ adhérent à D et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose f définie au voisinage de a à gauche et à droite.

(i) Si $a \in D$, on a l'équivalence $\quad \lim\limits_{a} f = \ell \iff \lim\limits_{a^-} f = \lim\limits_{a^+} f = \ell$ ET $\ell = f(a)$.

(ii) Si $a \notin D$, on a l'équivalence $\quad \lim\limits_{a} f = \ell \iff \lim\limits_{a^-} f = \lim\limits_{a^+} f = \ell$.

Démonstration. Cf. annexe A. ■

Pour saisir la nécessité de la condition « ET $\ell = f(a)$ » du cas **(i)**, il suffit d'observer les deux figures qui suivent le théorème 3.

Exemple 11 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \geqslant 0, \\ 1 - x & \text{si } x < 0. \end{cases}$ Alors $\lim\limits_{0} f = 1$.

En effet, $\lim\limits_{0^-} f = \lim\limits_{x\to 0^-} (1 - x) = 1, \quad \lim\limits_{0^+} f = \lim\limits_{x\to 0^+} e^x = 1 \quad$ et $\quad f(0) = e^0 = 1.$

2 Manipulation des limites

La base du calcul des limites repose sur la connaissance des limites des fonctions usuelles (rappelées au chapitre 5), leurs combinaisons par opérations et les résultats de croissances comparées entre les fonctions logarithmes, puissances et exponentielles (également rappelés au chapitre 5).

Les résultats des deux paragraphes suivants concernant les limites par opérations et en lien avec les inégalités s'énoncent de façon analogues, lorsque cela a un sens, pour des limites à gauche ou à droite.

2.1 Opérations sur les limites

Soit f et g deux fonctions et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $\lim\limits_{a} f$ et $\lim\limits_{a} g$ EXISTENT. Dans ce paragraphe, ℓ, ℓ' désigneront deux réels. Les tableaux ci-dessous énoncent les résultats concernant les ÉVENTUELLES limites en a de la somme $f + g$, du produit fg et du quotient f/g. Précisément, les cas d'*indétermination*, *i.e.* ceux pour lesquels il n'est pas possible de conclure a priori, sont indiqués par ? ? ?. On observera que ces résultats sont totalement similaires à ceux énoncés pour les suites ! On pourra d'ailleurs s'inspirer des démonstrations données pour les suites pour établir les règles ci-après.

Somme

$\lim_a f$	ℓ	ℓ ou $+\infty$	ℓ ou $-\infty$	$+\infty$
$\lim_a g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_a (f+g)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	? ? ?

Produit

$\lim_a f$	ℓ	$\ell \neq 0$ ou ∞	0
$\lim_a g$	ℓ'	∞	∞
$\lim_a (fg)$	$\ell\ell'$	∞ + règle des signes	? ? ?

Quotient

$\lim_a f$	ℓ	∞	ℓ	∞	$\ell \neq 0$ ou ∞	ℓ ou ∞
$\lim_a g$	$\ell' \neq 0$	$\ell' \neq 0$	∞	∞	0^+ ou 0^-	0
$\lim_a \dfrac{f}{g}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	∞ + règle des signes	0	? ? ?	∞ + règle des signes	? ? ?

Terminons les opérations sur les limites avec leur composition.

Théorème 12 – Composition de limites

Soit $f : D \longrightarrow E$ et $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à E et $c \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\text{Si} \quad \lim_a f = b \quad \text{et} \quad \lim_b g = c, \quad \text{alors} \quad \lim_a g \circ f = c.$$

Démonstration. Soit $\mathscr{V}_c$ un voisinage de c. Par hypothèse sur g, il existe un voisinage $\mathscr{V}_b$ de b tel que, pour tout $x \in \mathscr{V}_b \cap E$, $g(x) \in \mathscr{V}_c$. Par hypothèse sur f, il existe alors un voisinage $\mathscr{V}_a$ de a tel que, pour tout $x \in \mathscr{V}_a \cap D$, $f(x) \in \mathscr{V}_b$. Par conséquent, pour tout $x \in \mathscr{V}_a \cap D$, $f(x) \in \mathscr{V}_b \cap E$ et donc $g(f(x)) \in \mathscr{V}_c$, d'où la conclusion. ∎

Exemple 13 $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{\mathrm{e}^{-2x}+1}{(\mathrm{e}^{-x}+1)^2}\right) = 0.$

2.2 Limites et relation d'ordre

Théorème 14 – Limites et inégalités strictes

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $m, M \in \mathbb{R}$.

(i) Si $\lim_a f < M$, alors $f < M$ au voisinage de a. **(ii)** Si $\lim_a f > m$, alors $f > m$ au voisinage de a.

Démonstration. Cf. annexe A. ∎

Théorème 15 – Limites et inégalités larges

Soit $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D. On suppose que f et g ont des limites FINIES en a.

$$\text{Si } f \leqslant g \text{ au voisinage de } a, \text{ alors } \lim_a f \leqslant \lim_a g.$$

Ce résultat est le plus souvent utilisé lorsque l'une des deux fonctions est constante.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\lim_a (g-f) < 0$. Le théorème précédent affirme alors que $g - f < 0$ au voisinage de a, contradiction ! ∎

✖ **Attention !** ✖ Le résultat précédent est faux avec des inégalités STRICTES !
Par exemple, $e^x > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, mais $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$.

On retiendra que $\boxed{\text{Seules les inégalités larges sont conservées lors d'un passage à la limite.}}$

2.3 Caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction

Le résultat suivant généralise le théorème de composition par une fonction pour les limites de suites (théorème 23 du chapitre 15).

Théorème 16 – Caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Les assertions suivantes sont équivalentes

(i) $\lim_a f = \ell$.

(ii) Pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite a à valeurs dans D, la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite ℓ.

Démonstration. Cf. annexe A. ■

✎ **En pratique** ✎ Ce résultat est souvent utilisé pour montrer qu'une fonction f n'admet pas de limite en a. Il suffit pour cela d'exhiber une suite convergeant vers a dont l'image par f ne converge pas, ou deux suites convergeant vers a dont les images par f ont des limites distinctes.

Exemple 17 La fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$.

En effet, $\lim_{n \to +\infty} n\pi = \lim_{n \to +\infty} \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = +\infty$, mais $\lim_{n \to +\infty} \overbrace{\sin(n\pi)}^{=0} = 0 \neq 1 = \lim_{n \to +\infty} \overbrace{\sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)}^{=1}$.

3 Théorèmes d'existence de limite

Les résultats précédents permettent seulement de manipuler des limites dont on connait a priori l'existence. Les théorèmes qui suivent énoncent justement des conditions suffisantes pour établir l'EXISTENCE d'une limite.

3.1 Théorème d'encadrement/minoration/majoration

Théorème 18

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $m : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $M : D \longrightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $\ell \in \mathbb{R}$.

- **Théorème d'encadrement.** Si $\lim_{x \to a} m(x) = \lim_{x \to a} M(x) = \ell$ et si $m \leqslant f \leqslant M$ au voisinage de a, alors $\lim_a f$ EXISTE et vaut ℓ.
- **Théorème de minoration.** Si $\lim_{x \to a} m(x) = +\infty$ et si $f \geqslant m$ au voisinage de a, alors $\lim_a f$ EXISTE et vaut $+\infty$.
- **Théorème de majoration.** Si $\lim_{x \to a} M(x) = -\infty$ et si $f \leqslant M$ au voisinage de a, alors $\lim_a f$ EXISTE et vaut $-\infty$.

Démonstration. Cf. annexe A. ■

✖ **Attention !** ✖ Comme pour les suites, on veillera à ne pas confondre le théorème d'encadrement avec le théorème de passage à la limite dans les inégalités.

Le théorème d'encadrement est souvent utilisé sous l'une des formes suivantes, comme nous l'avions déjà souligné pour les suites.

Corollaire 19 – Théorème d'encadrement bis

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\varepsilon : D \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $\ell \in \mathbb{R}$. S'il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de a tel que, pour tout $x \in \mathscr{V} \cap D$, $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon(x)$ et si $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$, alors $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$.

Démonstration. Exercice. ■

Corollaire 20 – Produit d'une fonction bornée et d'une fonction de limite nulle

Soit $f, \varepsilon : D \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D. Si f est bornée au voisinage de a et si $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) f(x) = 0$.

Démonstration. Exercice. ■

3.2 Théorème de la limite monotone

Théorème 21 – Théorème de la limite monotone

Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, avec $a < b$, et $f : [a\,, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante.

(i) La limite $\lim\limits_{a^+} f$ EXISTE et est FINIE. Précisément, $f(a) \leqslant \lim\limits_{a^+} f$.

(ii) Pour tout $c \in]a\,, b[$, les limites $\lim\limits_{c^-} f$ et $\lim\limits_{c^+} f$ EXISTENT et sont FINIES. Précisément, $\lim\limits_{c^-} f \leqslant f(c) \leqslant \lim\limits_{c^+} f$.

(iii) La limite $\lim\limits_{b} f$ EXISTE et est soit finie (si f est majorée au voisinage de b), soit égale à $+\infty$ (sinon).

On dispose de résultats analogues pour les formes d'intervalles autres que $[a\,, b[$ ainsi que pour les fonctions décroissantes.

Démonstration. ... ■

En résumé :

Si f est monotone, elle possède des limites À GAUCHE et À DROITE en tout point où cela peut avoir un sens.

4 Continuité d'une fonction

4.1 Définition

D'un point de vue qualitatif, une fonction est *continue* sur un intervalle lorsque l'on peut tracer sa courbe représentative sans lever le crayon, autrement dit lorsque sa courbe représentative est d'un seul morceau. Ce point de vue graphique traduit l'idée que, pour tout point a de l'intervalle de définition, lorsque l'abscisse x se rapproche de a, par la droite ou par la gauche, $f(x)$ se rapproche de $f(a)$.

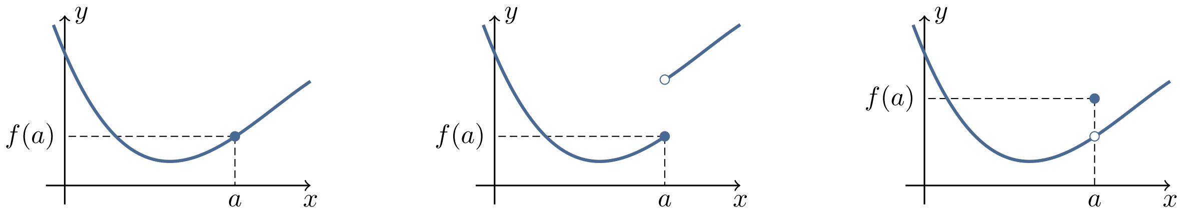
Dans l'ensemble de cette section, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points.

Définition 22 – Continuité

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.

- La fonction f est dite *continue en a* lorsque $\lim\limits_{a} f$ EXISTE. Le cas échéant, $\lim\limits_{a} f = f(a)$, f étant définie en a.
  La continuité de f en a s'exprime donc par :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in I, \quad |x - a| < \eta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$



f est continue en a — f n'est pas continue en a — f n'est pas continue en a

- La fonction f définie sur I est dite *continue sur I* lorsqu'elle est continue en tout point de I.
  On note $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ (ou $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$) l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs réelles.

Exemple 23 La fonction valeur absolue $|\cdot|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

En effet, pour tout $a \in \mathbb{R}$, montrons que $|\cdot|$ est continue en a. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\big||x| - |a|\big| \leqslant |x-a|$, d'après l'inégalité triangulaire, ainsi pour $\eta = \varepsilon$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x-a| < \eta \implies \big||x| - |a|\big| < \varepsilon.$$

Remarque 24

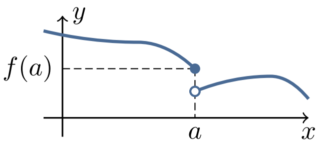
- Pour évoquer la continuité d'une fonction f en a, il est nécessaire que f soit définie en a.
- *Une subtilité.* Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et J un intervalle inclus dans I. Si f est continue en tout point de J, alors la restriction $f|_J$ est continue sur J. En revanche, la réciproque de cet énoncé est fausse. Par exemple, la restriction de la fonction indicatrice $\mathbb{1}_{[0,+\infty[}$ à $[0\,,+\infty[$ est continue sur $[0\,,+\infty[$, alors que la fonction $\mathbb{1}_{[0,+\infty[}$ définie sur $\mathbb{R}$ n'est pas continue en 0.

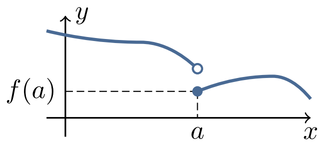
Définition 25 – Continuité à gauche/à droite en un point

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. On suppose f définie au voisinage de a à gauche et à droite.

- La fonction f est dite *continue à gauche en a* lorsque $f|_{I \cap]-\infty,a]}$ est continue en a, *i.e.* lorsque $\lim\limits_{a^-} f = f(a)$.
- La fonction f est dite *continue à droite en a* lorsque $f|_{I \cap [a,+\infty[}$ est continue en a, *i.e.* lorsque $\lim\limits_{a^+} f = f(a)$.

f est continue en a à gauche, mais pas à droite.





f est continue en a à droite, mais pas à gauche.

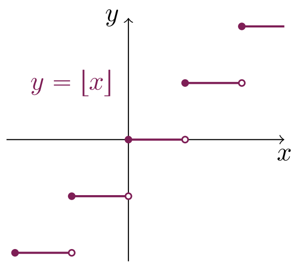
Le résultat suivant est la version « continuité » du résultat analogue sur les limites d'une fonction (cf. théorème 10).

Théorème 26 – Caractérisation de la continuité à l'aide des continuités à gauche/à droite

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. On suppose f définie au voisinage de a à gauche et à droite. La fonction f est continue en a si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en a.

Exemple 27 La fonction partie entière $\lfloor\cdot\rfloor$ est continue en tout point non entier, mais seulement continue à droite en tout point entier.

En effet, examinons la continuité en un point entier $n \in \mathbb{Z}$. Pour tout $x \in [n\,,n+1[$, $\lfloor x\rfloor = n$, ainsi $\lim\limits_{x\to n^+} \lfloor x\rfloor = n = \lfloor n\rfloor$ et $\lfloor\cdot\rfloor$ est donc continue à droite en n.
Au contraire, pour tout $x \in [n-1\,,n[$, $\lfloor x\rfloor = n-1$, ainsi $\lim\limits_{x\to n^-} \lfloor x\rfloor = n-1 \neq n = \lfloor n\rfloor$ et $\lfloor\cdot\rfloor$ n'est donc pas continue à gauche en n.

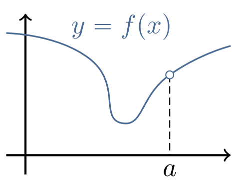


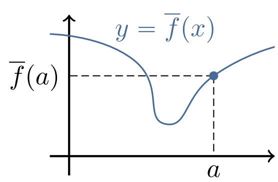
4.2 Prolongement par continuité en un point

Définition-théorème 28 – Prolongement par continuité en un point

Soit $a \in \overline{I} \cap \mathbb{R}$ et $f : I \backslash \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction (NON définie en a donc).

La fonction f est dite *prolongeable par continuité en a* lorsque $\lim\limits_a f$ existe ET EST FINIE. Le prolongement $\overline{f}$ de f obtenu en posant $\overline{f}(a) = \lim\limits_a f$ est alors continue en a et appelé *prolongement par continuité en a de la fonction f.*





Démonstration. Il s'agit de montrer que $\overline{f}$ est continue en a, *i.e.* $\lim\limits_a \overline{f} = \overline{f}(a)$. Puisque, par définition, $\overline{f}$ et f coïncident sur $I\backslash\{a\}$, l'égalité $\lim\limits_a f = \overline{f}(a)$ s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in I\backslash\{a\}, \quad |x-a| < \eta \implies \left|\overline{f}(x) - \overline{f}(a)\right| < \varepsilon.$$

Or $\overline{f}$ est aussi définie en a et on peut évidemment remplacer $I\backslash\{a\}$ par I dans l'assertion précédente. ∎

Remarque 29 On écrit souvent « Prolongeons f par continuité en posant $f(a) = \lim\limits_{a} f$ » et l'on note encore f le prolongement $\overline{f}$ de f (par souci de simplicité), bien qu'en toute rigueur, les fonctions f et $\overline{f}$ sont distinctes, puisqu'elles n'ont pas le même ensemble de définition.

Exemple 30

- La fonction $x \longmapsto x \ln x$ n'est pas définie en 0, mais on peut la prolonger par continuité en ce point en lui donnant la valeur 0 en 0, puisque $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$, par croissance comparée.
- La fonction $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$ n'est pas définie en 0, mais on peut la prolonger par continuité en ce point en lui donnant la valeur 1 en 0, puisque $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.
- Pour $\alpha > 0$, $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$, ainsi en posant $0^\alpha = 0$, on prolonge la fonction $x \longmapsto x^\alpha$, a priori définie sur $\mathbb{R}_+^*$, en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

4.3 Continuité par opérations

Que ce soit en un point, en un point à droite ou à gauche, ou sur un intervalle, une combinaison linéaire et un produit de fonctions continues sont continus. Il en va de même pour l'inverse d'une fonction qui ne s'annule pas ainsi que pour la composée de deux fonctions composables. Ces résultats découlent immédiatement des résultats analogues concernant les limites de fonctions.

Corollaire 31

$\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}^I$, dont les éléments inversibles sont les fonctions qui ne s'annulent pas sur I.

Corollaire 32

Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$ et les fractions rationnelles sont continues sur leurs ensembles de définition respectifs.

Exemple 33 La fonction $x \longmapsto \left(\ln\left(x^2 + \mathrm{e}^{1/x}\right)\right)^2$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$ par opérations.

Exemple 34 Pour toutes fonctions $f, g \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$, les fonctions $\max\{f, g\}$ et $\min\{f, g\}$ sont continues sur I.
En effet, les fonctions $\max\{f, g\} = \dfrac{f + g + |f - g|}{2}$ et $\min\{f, g\} = \dfrac{f + g - |f - g|}{2}$ sont continues par opérations sur I.

4.4 Caractérisation séquentielle de la continuité

Le théorème suivant découle directement de son analogue pour les limites (cf. théorème 16).

Théorème 35 – Caractérisation séquentielle de la continuité en un point

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. Les assertions suivantes sont équivalentes

(i) f est continue en a.

(ii) Pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite a à valeurs dans I, la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

On reconnaîtra bien sûr le résultat mis en œuvre pour l'étude des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$: si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ et si f est continue en ℓ, alors ℓ est un point fixe de f.

✎ **En pratique** ✎ Ce résultat permet d'établir la discontinuité d'une fonction f en a. Il suffit pour cela d'exhiber une suite convergeant vers a dont l'image par f ne converge pas vers $f(a)$.

Exemple 36 La fonction $f : x \longmapsto \cos(1/x)$ ne saurait être prolongée par continuité en 0.
En effet, la suite définie par $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$ converge vers 0, tandis que celle définie par $f(x_n) = (-1)^n$ ne converge pas.

La caractérisation séquentielle de la continuité combinée à celle de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ permet d'établir la caractérisation suivante des fonctions linéaires.

Exemple 37 – Équation fonctionnelle de Cauchy Les fonctions $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

sont les fonctions linéaires $x \longmapsto ax$, avec $a \in \mathbb{R}$.

5 Théorèmes fondamentaux de continuité globale

La *continuité globale* désigne la continuité sur un intervalle – par opposition à la *continuité ponctuelle* en un point.

5.1 Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 38 – Théorème des valeurs intermédiaires (TVI), version « existence d'un antécédent »

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leqslant b$. Si $f \in \mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$, alors tout réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ possède AU MOINS un antécédent par f dans $[a,b]$.

Démonstration. Quitte à considérer $-f$, on peut supposer que $f(a) \leqslant f(b)$. Procédons par dichotomie. On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$ et l'on va construire par récurrence, à partir du segment $[a_0, b_0] = [a, b]$, de nouveaux segments plus petits localisant un antécédent de $y \in [f(a), f(b)]$. Précisément, soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que l'on ait déjà construit des réels $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n$ tels que

- **(i)** $a = a_0 \leqslant \ldots \leqslant a_n, \quad b_n \leqslant \ldots \leqslant b_0 = b$ et, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $b_k - a_k = \dfrac{b-a}{2^k}$;
- **(ii)** pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f(a_k) \leqslant y \leqslant f(b_k)$.

On définit alors au rang $n+1$ les réels a_{n+1} et b_{n+1} de la façon suivante : on pose $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \text{ et } b_{n+1} = c_n & \text{si } f(c_n) \geqslant y, \\ a_{n+1} = c_n \text{ et } b_{n+1} = b_n & \text{si } f(c_n) < y. \end{cases}$$

Dans la mesure où c_n est le milieu du segment $[a_n, b_n]$, les réels a_{n+1} et b_{n+1} satisfont les assertions **(i)** et **(ii)** au rang $n+1$.

Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construites sont adjacentes d'après **(i)** et possèdent donc une limite finie commune $x \in [a, b]$. Il suffit alors de passer à la limite dans **(ii)**, ce qui est loisible par continuité de f, pour obtenir $f(x) \leqslant y \leqslant f(x)$ et donc $y = f(x)$. ■

Remarque 39 Le théorème des valeurs intermédiaires assure que si y est entre $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation $f(x) = y$ possède au moins une solution. La dichotomie fournit même un procédé effectif de résolution approchée permettant d'obtenir un encadrement d'une solution aussi précis que l'on veut.

Exemple 40 Toute fonction polynomiale de degré impair s'annule sur $\mathbb{R}$.

En effet, une fonction polynomiale de degré impaire possède en $-\infty$ et $+\infty$ des limites infinies de signes opposés ; elle prend donc des valeurs positives et négatives. Comme elle est continue sur $\mathbb{R}$, elle s'annule.

Le TVI s'énonce de façon équivalente sous la forme suivante.

Théorème 41 – Théorème des valeurs intermédiaires, version « image d'un intervalle »

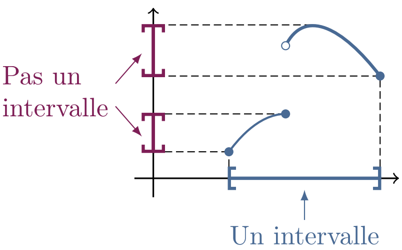
L'image d'un INTERVALLE par une fonction continue est un INTERVALLE.

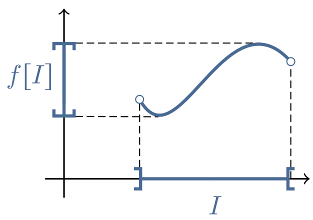
Démonstration. Soit I un intervalle et $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$. Pour établir que $f[I]$ est un intervalle, considérons $u, v \in f[I]$, avec $u \leqslant v$, et montrons que $[u, v] \subset f[I]$ (théorème 23 du chapitre 9). Soit $y \in [u, v]$. Par hypothèse, il existe $a, b \in I$ tels que $u = f(a)$ et $v = f(b)$. La version précédente du TVI assure alors l'existence de x entre a et b tel que $y = f(x)$. En particulier, puisque I est un intervalle, $x \in I$ et donc $y = f(x) \in f[I]$. ■

Remarque 42 Le théorème 41 implique clairement le théorème 38. En effet, avec les notations du théorème 38, pour tout réel y entre $f(a)$ et $f(b)$, on a $y \in [\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}] \subset f\big[[a\,,b]\big]$, puisque $f\big[[a\,,b]\big]$ est un intervalle (théorème 23 du chapitre 9).

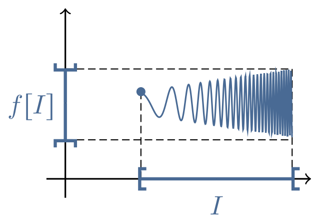
✖ Attention ! ✖

- Il suffit d'un point de discontinuité pour que le TVI tombe en défaut.
- Le TVI affirme que l'image continue $f[I]$ d'un intervalle I est également un intervalle, toutefois I et $f[I]$ ne sont pas a priori de même nature.





I ouvert et $f[I]$ fermé.



I semi-ouvert et $f[I]$ ouvert.

Remarque 43 – (non essentielle)

- Le TVI est faux dans $\mathbb{Q}$. Par exemple, la fonction $f : x \longmapsto x^2 - 2$ de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$ est continue sur $[0\,,2]$ et vérifie $f(0) = -2$ et $f(2) = 2$. Cependant, il n'existe pas de nombre rationnel x tel que $f(x) = 0$.
- On dit qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ satisfait la *propriété des valeurs intermédiaires* lorsque l'image par f de tout intervalle est encore un intervalle. Le TVI énonce ainsi que les fonctions continues satisfont cette propriété. Mais plus généralement, les fonctions dérivées (qui ne sont pas en général des fonctions continues) satisfont également la propriété des valeurs intermédiaires (théorème de Darboux, cf. exercice 19.26). De façon plus baroque, on peut aussi « construire » des fonctions discontinues en toute abscisse réelle et qui satisfont toujours cette propriété des valeurs intermédiaires !

5.2 Le théorème des bornes atteintes

Théorème 44 – Théorème des bornes atteintes

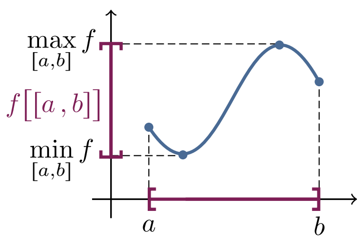
Les deux assertions suivantes sont vraies et équivalentes.

(i) Une fonction continue sur un SEGMENT y est bornée et atteint ses bornes, *i.e.* admet un minimum et un maximum.

(ii) L'image d'un SEGMENT par une fonction continue est un SEGMENT. Précisément, si f est continue sur $[a\,,b]$, alors $f\big[[a\,,b]\big] = [m\,,M]$, où $m = \min\limits_{[a,b]} f$ et $M = \max\limits_{[a,b]} f$.

Démonstration. L'équivalence entre **(i)** et **(ii)** est claire, via le TVI. Cf. annexe A pour une preuve de **(i)**. ■

Nous avons observé que la continuité ne préserve pas la forme d'un intervalle en général. Toutefois, le théorème précédent affirme qu'un segment est toujours transformé en un segment par une fonction continue.



✖ Attention ! ✖ Sur un intervalle borné qui n'est pas un segment, une fonction continue n'a aucune raison d'être bornée, *e.g.* la fonction inverse sur $]0\,,1]$.

Exemple 45 La fonction $f : x \longmapsto x \ln x$ possède un minimum sur $]0\,,1]$.

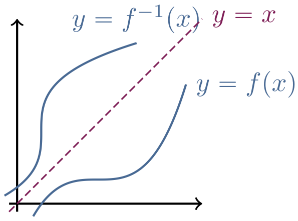
5.3 Théorème de la bijection continue, continuité d'une réciproque

Le TVI est un théorème d'« existence » : il garantit l'existence d'un antécédent de y par f ou, de façon équivalente, d'une solution à l'équation $y = f(x)$. Pour obtenir en plus l'unicité, une condition suffisante réside dans la stricte monotonie de f.

Théorème 46 – Théorème de la bijection continue

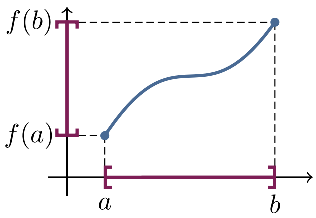
- Si I est un INTERVALLE et f une fonction CONTINUE et STRICTEMENT MONOTONE sur I, alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle $f[I]$.
- Dans ces conditions, la réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone, de même sens de variation que f, sur l'intervalle $f[I]$.

Démonstration. Cf. annexe A. ∎

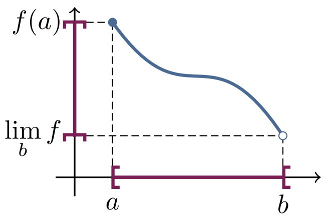


Les graphes de f et f^{-1} sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la première bissectrice. Si le graphe de f peut être tracé sans que l'on ait à lever le crayon, comment le graphe de f^{-1} ne le serait-il pas ?

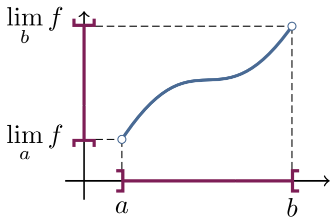
Remarque 47 Selon la nature de I et la monotonie de f, l'obtention de $f[I]$ varie, *e.g.* pour deux réels $a < b$,



$I = [a\,,b]$ et $f[I] = [f(a)\,,f(b)]$.



$I = [a\,,b[$ et $f[I] =]\lim_b f; f(a)]$.



$I =]a\,,b[$ et $f[I] =]\lim_a f; \lim_b f[$.

Il existe bien sûr d'autres versions selon que f est strictement croissante ou décroissante et définie ou non en a et b, avec éventuellement $a = -\infty$ ou $b = +\infty$.

Exemple 48

- La fonction exponentielle est définie comme la réciproque de la logarithme népérien. Elle est donc, à l'instar de la fonction logarithme népérien, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- La fonction arctangente est définie comme la réciproque de la fonction tangente restreinte à $\left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[$. Elle est donc, à l'instar de la fonction tangente, à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[$, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple 49 – Fonctions puissances

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction racine n^{e} est définie comme la réciproque de la fonction puissance $f : x \longmapsto x^n$ restreinte à $\mathbb{R}_+$. Elle est donc, à l'instar de la fonction $f|_{\mathbb{R}_+}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. On note $x^{1/n}$ ou $\sqrt[n]{x}$ l'image de x par f^{-1}. Le cas $n = 2$ correspond à la fonction racine carrée.
- Si n est un entier naturel impair, la fonction $x \longmapsto x^n$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, ce qui permet de définir la racine n^{e} sur $\mathbb{R}$. Le cas $n = 3$ correspond à la racine cubique $\sqrt[3]{\cdot}$.
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Plus généralement, la fonction puissance $x \longmapsto x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$ – elle est continue et strictement croissante (resp. décroissante) si $\alpha > 0$ (resp. $\alpha < 0$). Sa bijection réciproque est $x \longmapsto x^{1/\alpha}$.

Remarque 50 – Limites aux bornes d'une réciproque Soit $f \in \mathscr{C}([a\,,b[,\mathbb{R})$, avec $a < b$. Si f est strictement croissante et si $\lim_b f = \ell \in \mathbb{R}$, alors f réalise une bijection de $[a\,,b[$ sur $[f(a)\,,\ell[$ et il semble évident que $\lim_\ell f^{-1} = b$. Notons alors que la justification de cette limite découle essentiellement du théorème de la limite monotone.
En effet, f^{-1} est croissante à l'instar de f, ainsi la limite $\lim_\ell f^{-1}$ existe, d'après le théorème de la limite monotone, notons là L. Par composition de limite, il vient

$$f^{-1}(f(x)) \underset{x\to b}{\longrightarrow} L \quad \text{et} \quad f^{-1}(f(x)) = x \underset{x\to b}{\longrightarrow} b,$$

d'où le résultat par unicité de la limite.
Ce raisonnement s'adapte bien sûr à f strictement décroissante et avec un intervalle de départ d'un autre type.

Terminons ce paragraphe avec une réciproque partielle du théorème 62 du chapitre 3.

Théorème 51 – Injectivité et stricte monotonie (bis)

Soit $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$. Si f est injective sur l'INTERVALLE I, alors f est strictement monotone sur I.

Démonstration. Cf. annexe A. ∎

6 Extension aux fonctions à valeurs complexes

Cette ultime section vise à étendre brièvement les définitions et théorèmes précédents aux fonctions de la variable réelle à valeurs complexes.

6.1 Limites des fonctions

Définition 52 – Limite d'une fonction en un point

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que f *admet* ℓ *pour limite en* a lorsque la fonction réelle $|f - \ell|$ tend vers 0 en a. Dans ce contexte, le théorème d'unicité de la limite reste valable, ce qui autorise les notations $\lim\limits_a f = \ell$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

✖ ATTENTION ! ✖ Comme pour les suites complexes, la notion de limite infinie n'a aucun sens pour les fonctions à valeurs complexes.

On dispose naturellement de résultats similaires à ceux obtenus pour les suites complexes.

Théorème 53

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $\ell \in \mathbb{C}$. Si $\lim\limits_a f = \ell$, alors

(i) la fonction $|f|$ tend vers $|\ell|$ en a et, en particulier, la fonction f est bornée au voisinage de a ;

(ii) la fonction $\overline{f}$ tend vers $\overline{\ell}$ en a.

Théorème 54 – Caractérisation de la limite par les parties réelle et imaginaire

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $\ell \in \mathbb{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\lim\limits_a f = \ell$. **(ii)** $\lim\limits_a \mathrm{Re}(f) = \mathrm{Re}(\ell)$ et $\lim\limits_a \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(\ell)$.

Exemple 55

- La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1 + ix}$, définie sur $\mathbb{R}$, admet 0 pour limite en $+\infty$, car $\lim\limits_{x \to +\infty} |f(x)| = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}} = 0$.
- La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{ix}}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^*$, n'a pas de limite en 0, puisque sa partie réelle $x \longmapsto \dfrac{\cos x}{x}$ n'en a pas.

Les notions de limites à gauche et à droite, ainsi que la caractérisation de la limite en termes de limite à gauche et à droite, sont maintenues pour les fonctions complexes. La caractérisation séquentielle de la limite l'est également. Par ailleurs, les théorèmes opératoires sur les limites (addition, produit, quotient) restent valables, modulo la suppression des colonnes liées aux cas $\pm\infty$ des tables de la section 2.1.

En revanche, les théorèmes cruciaux d'existence de limite de la section 3 (théorèmes d'encadrement / majoration / minoration et théorème de la limite monotone) n'ont aucun sens dans le cas complexe, dans la mesure où ces théorèmes s'appuient de façon essentielle sur la relation d'ordre de $\mathbb{R}$.

6.2 Fonctions continues

Dans l'ensemble de ce paragraphe, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points.

Définition 56 – Continuité

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $a \in I$.

- La fonction f est dite *continue en* a lorsque $\lim\limits_{a} f$ EXISTE. Le cas échéant, $\lim\limits_{a} f = f(a)$, f étant définie en a.
- La fonction f est dite *continue sur* I lorsqu'elle est continue en tout point de I. On note $\mathscr{C}(I,\mathbb{C})$ (ou $\mathscr{C}^0(I,\mathbb{C})$) l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs complexes.

Théorème 57 – Caractérisation de la continuité

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. La fonction f est continue sur I si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.

Les notions de continuité à gauche et à droite, ainsi que la caractérisation de la continuité en termes de continuité à gauche et à droite, sont aussi maintenues pour les fonctions complexes. La caractérisation séquentielle de la continuité l'est également. Par ailleurs, les théorèmes opératoires sur la continuité (combinaison linéaire, produit, quotient) restent valables. En revanche, les théorèmes fondamentaux de la section 5 sont réservés aux fonctions à valeurs réelles.

Exemple 58

- Les fonctions polynomiales et les fractions rationnelles à coefficients complexes sont continues sur leurs ensembles de définition respectifs.
- Si f une fonction à valeurs complexes est continue sur I, il en va de même de $\overline{f}$, $|f|$ et e^f.

  En effet, on procède par opérations sur les fonctions réelles à partir des égalités

$$\overline{f} = \mathrm{Re}(f) - i\,\mathrm{Im}(f), \quad |f| = \sqrt{\mathrm{Re}(f)^2 + \mathrm{Im}(f)^2} \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^f = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(f)}\cos(\mathrm{Im}\, f) + i\,\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(f)}\sin(\mathrm{Im}\, f).$$

7 Continuité uniforme

La notion plus exigeante de continuité suivante sera exploitée au chapitre 25 pour la construction de l'intégrale.

Définition 59 – Continuité uniforme

Une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs complexes est dite *uniformément continue sur* I lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall (x,y) \in I^2, \quad |x-y| \leqslant \eta \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

Rappelons que la continuité de f sur I s'écrit

$$\forall x \in I, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall y \in I, \quad |x-y| \leqslant \eta \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

La différence entre les deux notions réside ainsi dans l'indépendance de la variable η de l'uniforme continuité vis-à-vis de la variable x (η ne dépendant que de ε) tandis que pour la continuité η dépend a priori de x.

Théorème 60

Si une fonction f est uniformément continue sur un intervalle I, alors f est continue sur I.

✖ ATTENTION ! ✖ La réciproque du théorème précédent est fausse en toute généralité, comme l'établit l'exemple suivant. On dispose néanmoins d'une réciproque partielle sur les segments (cf. théorème 62).

Exemple 61 La fonction carrée est uniformément continue sur $[0,1]$, mais n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème 62 – Théorème de Heine

Si I est un SEGMENT de $\mathbb{R}$, alors toute fonction continue sur I est uniformément continue sur I.

Démonstration. Admis conformément au programme. Une preuve est donnée à l'annexe A. ■

8 Fonctions lipschitziennes

Définition 63 – Fonction lipschitzienne

Soit I un intervalle et k un réel positif. Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite *k-lipschitzienne*† *sur I* lorsque

$$\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|.$$

Une fonction est dite *lipschitzienne* s'il existe un réel positif k pour lequel elle est k-lipschitzienne.

Les variations des applications lipschitziennes sont donc contrôlées linéairement par celles de la variable. Géométriquement, une fonction est k-lipschitzienne si les pentes des cordes de son graphe sont majorées en valeur absolue par k.

Exemple 64

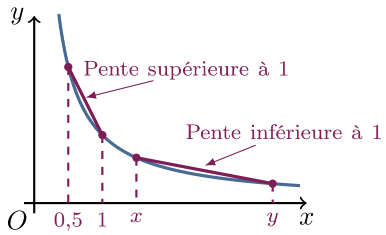
1. Toute fonction affine $x \longmapsto ax + b$ est $|a|$-lipschitzienne.
2. La fonction valeur absolue est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

   En effet, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$ (inégalité triangulaire généralisée).

Exemple 65 La fonction inverse est 1-lipschitzienne sur $[1, +\infty[$, mais n'est pas 1-lipschitzienne sur $]0, +\infty[$.

En effet, pour tous $x, y \in [1, +\infty[$, $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|x-y|}{xy} \leqslant |x - y|$, puisque $xy \geqslant 1$.
En revanche,

$$\left|1 - \frac{1}{\frac{1}{2}}\right| = |1 - 2| = 1 > \frac{1}{2} = \left|1 - \frac{1}{2}\right|.$$



Théorème 66 – Lien entre continuité uniforme et lipschitziannité

Si une fonction f est lipschitzienne sur un intervalle I, alors f est uniformément continue sur I.

Démonstration. Si f est k-lipschitzienne sur I, avec $k > 0$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, le réel $\eta = \varepsilon/k$ convient. ■

✖ **Attention !** ✖ La réciproque est fausse ! Comme le montre le deuxième point de l'exemple ci-après.

Exemple 67

- La fonction sinus est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine carrée est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$, mais n'est pas lispschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque 68 En revanche, une fonction peut être lipschitzienne sans être dérivable (cf. exemple 64).

Application aux suites $\mathbf{u_{n+1} = f(u_n)}$. Considérons un intervalle I, une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ pour laquelle I est stable et $u_0 \in I$. Notons alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ l'unique suite définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Sous les hypothèses

- f possède un unique point fixe ℓ dans I ;
- f est k-lipschitzienne avec $k \in [0, 1[$;

on démontre par récurrence sur n que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| \leqslant k^n |u_0 - \ell|.$$

On en déduit par encadrement que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ, car $|k| < 1$. Mieux, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge rapidement vers sa limite, au sens où elle converge vers ℓ au moins aussi vite que la suite géométrique $(k^n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0.

Exemple 69 La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 \geqslant 0$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n + 2}{2 + u_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, converge vers $\sqrt{2}$.

†. Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832 à Königsberg – 1903 à Bonn) est un mathématicien allemand.

Compétences à acquérir

- Obtention de limites par opérations : exercices 1 à 3.
- Utilisation de la caractérisation séquentielle de la limite : exercice 4.
- Manipulation de la notion de limite en revenant à la définition : exercices 11,12 et 44.
- Étude des branches infinies d'une fonction : exercices 5 et 6.
- Étude de la continuité par opérations : exercice 16.
- Étude de la continuité par définition : exercices 15, 16 et 21 (voire 23 et 24).
- Utilisation de la caractérisation séquentielle de la continuité : exercices 10, 17 et 28 à 31.
- Utilisation du TVI : exercices 34 à 39.
- Utilisation du théorème des bornes atteintes : exercices 43 à 45.
- Montrer qu'une fonction est (ou n'est pas) uniformément continue : exercices 48 à 50.
- Exploiter la continuité uniforme d'une fonction : exercices 51 et 52

Quelques résultats classiques :

- Continuité des fonctions $\max\{f, g\}$ et $\min\{f, g\}$ (exemple 34).
- Équation fonctionnelle de Cauchy (exemple 37).
- Annulation des fonctions polynomiales réelles de degré impair (exemple 40).
- Un théorème de point fixe pour les fonctions contractantes (exercice 20).
- Un théorème de point fixe pour les fonctions continues d'un segment dans lui-même (exercice 35).

A Annexe

Démonstration du théorème 3.

(i) Par l'absurde, supposons que f admet deux limites ℓ et ℓ' distinctes. Il existe alors $\mathscr{V}_\ell$ et $\mathscr{V}_{\ell'}$ des voisinages respectifs de ℓ et ℓ' disjoints (point **(ii)** du théorème 25 du chapitre 9) et, par hypothèse, il existe $\mathscr{V}_a$ et $\mathscr{V}'_a$ deux voisinages de a tels que

$$\forall x \in \mathscr{V}_a \cap D, \quad f(x) \in \mathscr{V}_\ell \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathscr{V}'_a \cap D, \quad f(x) \in \mathscr{V}_{\ell'}.$$

Or $D \cap \mathscr{V}_a \cap \mathscr{V}'_a \neq \varnothing$ et, pour tout $x \in D \cap \mathscr{V}_a \cap \mathscr{V}'_a$, $f(x) \in \mathscr{V}_\ell \cap \mathscr{V}_{\ell'} = \varnothing$. Contradiction !

(ii) Supposons que $a \in D$, *i.e.* f est définie en a, et que f possède une limite en a, notée ℓ.

- Par l'absurde supposons $\ell = +\infty$. Il existe alors, par hypothèse, un voisinage $\mathscr{V}_a$ de a tel que, pour tout $x \in \mathscr{V}_a \cap D$, $f(x) \in \left]f(a)\,, +\infty\right[$. Pour $x = a \in \mathscr{V}_a \cap D$, on aurait $f(a) \in \left]f(a)\,, +\infty\right[$, ce qui est contradictoire !
  On établit de même que $\ell = -\infty$ est exclu. Ainsi $\ell = \mathbb{R}$.
- Montrons que $\ell = f(a)$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe, par hypothèse, un voisinage $\mathscr{V}_a$ de a tel que, pour tout $x \in \mathscr{V}_a \cap D$, $f(x) \in \left]\ell - \varepsilon\,, \ell + \varepsilon\right[$. En particulier, pour $x = a$, $|f(a) - \ell| < \varepsilon$. Nécessairement $\ell = f(a)$.

Démonstration du théorème 10. Traitons le point **(i)**.

- Supposons que $\lim\limits_a f = \ell$. D'après le point **(ii)** du théorème 3, $f(a) = \ell$. En outre, soit $\mathscr{V}_\ell$ un voisinage de ℓ.
  Par hypothèse, il existe un voisinage $\mathscr{V}_a$ de a tel que, pour tout $x \in \mathscr{V}_a \cap D$, $f(x) \in \mathscr{V}_\ell$. A fortiori, pour tout $x \in \mathscr{V}_a \cap D \cap \left]-\infty\,, a\right[$, $f(x) \in \mathscr{V}_\ell$, soit $\lim\limits_{a^-} f = \ell$, et de même $\lim\limits_{a^+} f = \ell$.
- Réciproquement, supposons que $\lim\limits_{a^-} f = \lim\limits_{a^+} f = f(a) = \ell$. Nécessairement $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$, par hypothèses
  × il existe $\eta^- > 0$ tel que, pour tout $x \in D$, $\quad a - \eta^- < x < a \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$;
  × il existe $\eta^+ > 0$ tel que, pour tout $x \in D$, $\quad a < x < a + \eta^+ \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$;
  or $|f(a) - \ell| = 0 < \varepsilon$, ainsi, en posant $\eta = \min\{\eta^-, \eta^+\}$ on a $\eta > 0$ et, pour tout $x \in D$, l'implication
  $$|x - a| < \eta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$
  soit $\lim\limits_a f = \ell$.

Démonstration du théorème 14. Contentons-nous de prouver **(ii)**. Posons $\ell = \lim\limits_a f$.

- Si $\ell = +\infty$, il existe un voisinage $\mathscr{V}_a$ de a tel que, pour tout $x \in D \cap \mathscr{V}_a$, $f(x) \in \left]m\,, +\infty\right[$.
- Si $\ell \in \mathbb{R}$, sachant que $\ell - m > 0$ par hypothèse, il existe un voisinage $\mathscr{V}_a$ de a tel que
  $$\forall x \in \mathscr{V}_a \cap D, \quad f(x) \in \left]\ell - (\ell - m)\,, \ell + (\ell - m)\right[\subset \left]m\,, +\infty\right[.$$

Dans les deux cas, $f > m$ au voisinage de a.

Démonstration du théorème 16.

- **(i) $\Longrightarrow$ (ii).** Supposons que $\lim\limits_a f = \ell$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de limite a à valeurs dans D. Soit $\mathscr{V}_\ell$ un voisinage de ℓ. Par hypothèse, il existe un voisinage $\mathscr{V}_a$ de a tel que, pour tout $x \in \mathscr{V}_a \cap D$, $f(x) \in \mathscr{V}_\ell$. Par ailleurs, il existe un rang N tel que, pour tout $n \geqslant N$, $u_n \in \mathscr{V}_a$, d'où $u_n \in \mathscr{V}_a$ et finalement $f(u_n) \in \mathscr{V}_\ell$.
- **(ii) $\Longrightarrow$ (i).** Traitons le cas particulier, $a, \ell \in \mathbb{R}$. Les autres cas étant similaires. Contraposons en supposant que f n'admet pas ℓ pour limite en a. Il existe donc $\varepsilon_0 > 0$ tel que
  $$\forall \eta > 0, \quad \exists x \in D, \quad |x - a| < \eta \ \text{ et } \ |f(x) - \ell| \geqslant \varepsilon_0.$$
  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'assertion précédente fournit pour $\eta = \dfrac{1}{n}$ un réel $u_n \in D$ tel que $|u_n - a| < \dfrac{1}{n}$ et $|f(u_n) - \ell| \geqslant \varepsilon_0$. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ ainsi construite est à valeurs dans D et converge vers a, tandis que la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\geqslant 1}$ n'admet pas ℓ pour limite.

Démonstration du théorème 18.

1. Supposons que $\lim\limits_a m = \lim\limits_a M = \ell$ et que $m \leqslant f \leqslant M$ au voisinage de a. Soit $\varepsilon > 0$,
- il existe un voisinage $\mathscr{V}_a$ de a tel que, pour tout $x \in \mathscr{V}_a \cap D$, $m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x)$;
- il existe un voisinage $\mathscr{V}'_a$ de a tel que, pour tout $x \in \mathscr{V}'_a \cap D$, $\ell - \varepsilon < m(x)$;
- il existe un voisinage $\mathscr{V}''_a$ de a tel que, pour tout $x \in \mathscr{V}''_a \cap D$, $M(x) < \ell + \varepsilon$;

alors $\mathscr{V}_a \cap \mathscr{V}'_a \cap \mathscr{V}''_a$ est un voisinage de a et, pour tout $x \in \mathscr{V}_a \cap \mathscr{V}'_a \cap \mathscr{V}''_a \cap D$, on a l'implication
$$\ell - \varepsilon < m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x) < \ell + \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$
soit $\lim\limits_a f = \ell$.

2. Supposons que $\lim\limits_a m = +\infty$ et que $f \geqslant m$ au voisinage de a. Soit $A > 0$,
- il existe un voisinage $\mathscr{V}_a$ de a tel que, pour tout $x \in \mathscr{V}_a \cap D$, $f(x) \geqslant m(x)$;
- il existe un voisinage $\mathscr{V}'_a$ de a tel que, pour tout $x \in \mathscr{V}'_a \cap D$, $m(x) > A$;

alors $\mathscr{V}_a \cap \mathscr{V}'_a$ est un voisinage de a et, pour tout $x \in \mathscr{V}_a \cap \mathscr{V}'_a \cap D$, $f(x) \geqslant m(x) > A$, soit $\lim\limits_a f = +\infty$.

Démonstration 1 du point (i) du théorème 44 (via le théorème de Bolzano-Weierstrass).

Montrons que f admet une borne supérieure M sur $[a\,,b]$ et qu'il existe $x \in [a\,,b]$ tel que $M = f(x)$.

- Par l'absurde, supposons f non majorée sur $[a\,,b]$, *i.e.*
$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists x \in [a\,,b], \quad f(x) > A.$$
On peut alors construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[a\,,b]$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x_n) \geqslant n. \qquad (\star)$$
Cette suite étant bornée par construction, on peut en extraire une sous-suite convergente $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dont la limite α est dans $[a\,,b]$ (théorème de Bolzano-Weierstrass). Comme f est continue en α, on en déduit que $\left(f\left(x_{\varphi(n)}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente donc bornée, ce qui est en contradiction avec la relation $(\star)$. Par conséquent, f est majorée sur $[a\,,b]$.
- Raisonnons à nouveau par l'absurde, en supposant que $M = \sup\limits_{[a,b]} f$ ne soit pas atteint, *i.e.*
$$\forall x \in [a\,,b], \quad f(x) \neq M.$$
La fonction $g : x \longmapsto \frac{1}{M-f(x)}$ est alors définie et continue sur$[a\,,b]$, comme inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas. Or, on a vu dans la première partie de la démonstration que toute application continue sur le segement $[a\,,b]$ est majorée. Soit donc A un majorant (strictement positif) de g. On a
$$\forall x \in [a\,,b], \quad g(x) \leqslant A$$
et donc
$$\forall x \in [a\,,b], \quad f(x) \leqslant M - \frac{1}{A}.$$
Le réel $M - \dfrac{1}{A}$ est alors un majorant de f strictement plus petit que M, ce qui contredit le fait que M est la borne supérieure de f sur $[a\,,b]$. Il existe donc $x \in [a\,,b]$ tel que $M = f(x)$.

En appliquant ce qui précède à $-f$, on en déduit que f possède aussi une borne inférieure et que celle-ci est atteinte.

Démonstration 2 du point (i) du théorème 44 (par dichotomie). Nous nous contentons là aussi de montrer que f possède un maximum (il suffit de considérer $-f$ pour le minimum). Nous donnons une seconde démonstration par dichotomie et introduisons pour cela la notion suivante

Définition 70 – Intervalle dominant pour une fonction (HP)

Soit $f : [a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Un intervalle $[c\,,d] \subset [a\,,b]$ est dit *dominant* pour f lorsqu'il vérifie
$$\forall x \in [a\,,b], \quad \exists y \in [c\,,d], \quad f(y) \geqslant f(x).$$

On dispose alors du lemme suivant

Lemme 71

Soit $f : [a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si l'intervalle $[c\,,d] \subset [a\,,b]$ est dominant pour f et si $e \in [c\,,d]$, alors l'un des intervalles $[c\,,e]$ ou $[e\,,d]$ est dominant pour f.

Démonstration. Si $[c\,,e]$ est dominant pour f, c'est gagné. Sinon, il existe $x_0 \in [a\,,b]$ tel que, pour tout $y \in [c\,,e]$, $f(x_0) > f(y)$. Or, puisque $[c\,,d]$ est dominant pour f, il existe $y_0 \in [c\,,d]$ tel que $f(y_0) \geqslant f(x_0)$ et donc $y_0 \in [e\,,d]$. On en déduit le caractère dominant de $[e\,,d]$. En effet, soit $x \in [a\,,b]$. Il existe $y \in [c\,,d]$ tel que $f(y) \geqslant f(x)$. Soit $y \in [e\,,d]$, c'est réglé, soit $y \in [c\,,e]$, auquel cas $f(y) < f(x_0) \leqslant f(y_0)$. ■

On suppose f continue sur le segment $[a\,,b]$. On part de $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que l'on ait déjà construit des réels $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n$ tels que

(i) $a = a_0 \leqslant \ldots \leqslant a_n, \quad b_n \leqslant \ldots \leqslant b_0 = b$ et, pour tout $k \in [\![0\,,n]\!]$, $b_k - a_k = \dfrac{b-a}{2^k}$;

(ii) pour tout $k \in [\![0\,,n]\!]$, $[a_k\,,b_k]$ est dominant pour f.

On définit alors au rang $n+1$ les réels a_{n+1} et b_{n+1} de la façon suivante : on pose $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et
$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = c_n & \text{si } [a_n\,,c_n] \text{ est dominant pour } f; \\ a_{n+1} = c_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = b_n & \text{sinon.} \end{cases}$$
Dans la mesure où c_n est le milieu du segment $[a_n\,,b_n]$ et en vertu du lemme précédent, les réels a_{n+1} et b_{n+1} satisfont les assertions **(i)** et **(ii)** au rang $n+1$.

Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construites sont adjacentes d'après **(i)** et possèdent donc une limite finie commune $c \in [a\,,b]$. Montrons que $f(c)$ est le maximum de f sur $[a\,,b]$. Soit $x \in [a\,,b]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque $[a_n\,,b_n]$ est dominant pour f, il existe $x_n \in [a_n\,,b_n]$ tel que $f(x_n) \geqslant f(x)$. Or, par encadrement, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers c et, par continuité de f, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(c)$, qui vérifie, par passage à la limite, $f(c) \geqslant f(x)$.

Démonstration du théorème 46 (HP).

- D'après le TVI, $f[I]$ est un intervalle. En outre, par stricte monotonie, f est injective sur I et donc bijective de I sur $f[I]$.
- **Stricte monotonie.** Supposons f strictement croissante sur I (l'autre cas est similaire) et montrons qu'il en va de même de f^{-1} sur $f[I]$.
  Soit $y_1, y_2 \in f[I]$ avec $y_1 < y_2$. Par injectivité de f^{-1}, $f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2)$ et, par l'absurde, si $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$, alors, par stricte monotonie de f, $y_1 = f\big(f^{-1}(y_1)\big) > f\big(f^{-1}(y_2)\big) = y_2$ – absurde ! Ainsi $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, comme souhaité.
- **Continuité.** Montrons que f^{-1} est continue sur J, en supposant par exemple f strictement croissante sur I (quitte à changer f en $-f$).
  Soit $y_0 \in J$. Il existe $x_0 \in I$ tel que $y = f(x_0)$. Supposons que x_0 n'est pas une borne de I. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $[x_0 - \varepsilon\,, x_0 + \varepsilon] \subset I$. Posons $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$ et $y_2 = f(x_0 - \varepsilon)$. On a donc $y_1, y_2 \in J$ et $y_1 < y_0 < y_2$, par stricte croissance de f, ce qui permet de définir $\eta = \min\{y_0 - y_1, y_2 - y_0\} > 0$. On a alors l'assertion
  $$\forall y \in J, \quad |y - y_0| < \eta \implies y_1 < y < y_2 \implies x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon \iff \left|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\right| < \varepsilon,$$
  par stricte croissance de f^{-1} sur J, ce qui exprime la continuité de f^{-1} en y_0.
  Si x_0 est une borne de l'intervalle I, on modifie légèrement la démonstration, en considérant $[x_0\,, x_0 + \varepsilon]$ ou $[x_0 - \varepsilon\,, x_0]$ au lieu de $[x_0 - \varepsilon\,, x_0 + \varepsilon]$.

Démonstration du théorème 51 (HP). Fixons deux points $a, b \in I$ quelconques pour lesquels $a < b$.

Par injectivité de f, $f(a) \neq f(b)$, ainsi quitte à remplacer f par $-f$, qui est tout autant continue et injective que f, nous pouvons supposer $f(a) < f(b)$ sans perte de généralité. Montrons alors que f est strictement croissante.

Soit $x, y \in I$ avec $x < y$, à nouveau par injectivité de f, $f(x) \neq f(y)$, mais rien ne garantit a priori que $f(x) < f(y)$. En d'autres termes, rien ne garantit que f ordonne $f(x)$ et $f(y)$ de la même manière qu'elle ordonne $f(a)$ et $f(b)$.

Lorsque λ croit de 0 à 1, le réel $(1 - \lambda)a + \lambda x$ varie de a à x le long du segment qui joint ces deux abscisses, tandis que $(1 - \lambda)b + \lambda y$ varie de b à y. En outre, I étant un intervalle, les réels ainsi obtenus sont tous des éléments de I, ensemble de définition de f. Cette observation justifie la bonne définition de la fonction
$$\varphi : \lambda \longrightarrow f((1 - \lambda)b + \lambda y) - f((1 - \lambda)a + \lambda x)$$
de $[0\,, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Remarquons alors que

- $\varphi(0) = f(b) - f(a) > 0$ et nous cherchons le signe de $\varphi(1) = f(y) - f(x)$;
- φ est continue sur $[0\,, 1]$ car f l'est sur I ;
- φ ne s'annule pas sur $[0\,, 1]$. En effet, pour tout $\lambda \in [0\,, 1]$, si $\varphi(\lambda) = 0$, alors par injectivité de f
  $$(1 - \lambda)a + \lambda x = (1 - \lambda)b + \lambda y$$
  ce qui équivaut à
  $$\underbrace{(1 - \lambda)}_{\geqslant 0}\underbrace{(b - a)}_{> 0} + \underbrace{\lambda}_{\geqslant 0}\underbrace{(y - x)}_{> 0} = 0$$
  et impose donc $\lambda = 1 - \lambda = 0$, ce qui est absurde.

Par conséquent, le TVI garantit que φ est strictement positive sur $[0\,, 1]$, et en particulier $\varphi(1) = f(y) - f(x) > 0$.

Démonstration du théorème 62.

Soit f une application continue sur un segment I. Supposons par l'absurde que f ne soit pas uniformément continue sur I, *i.e.*
$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall \eta > 0, \quad \exists (x, y) \in I^2, \quad |x - y| \leqslant \eta \quad \text{et} \quad |f(x) - f(y)| > \varepsilon.$$
Considérons un tel $\varepsilon > 0$. Pour tout $\eta = 2^{-n}$, avec $n \in \mathbb{N}$, on peut donc choisir $(x_n, y_n) \in I^2$ tel que
$$|x_n - y_n| \leqslant \frac{1}{2^n} \quad \text{et} \quad |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon.$$
Les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi construites vérifient
$$\lim_{n \to +\infty} (x_n - y_n) = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon. \qquad (*)$$
L'intervalle I étant borné, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et on peut donc en extraire une sous-suite $\big(x_{\varphi(n)}\big)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers un élément α (théorème de Bolzano-Weierstrass), et ce dernier appartient à I puisque I est un intervalle fermé. Comme
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_{\varphi(n)} = x_{\varphi(n)} + \big(y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}\big),$$
on a aussi $\lim\limits_{n \to +\infty} y_{\varphi(n)} = \alpha$, par somme de limites. Or, l'application f étant continue en α, on en déduit
$$\lim_{n \to +\infty} \big(f\big(x_{\varphi(n)}\big) - f\big(y_{\varphi(n)}\big)\big) = \lim_{n \to +\infty} f\big(x_{\varphi(n)}\big) - \lim_{n \to +\infty} f\big(y_{\varphi(n)}\big) = f(\alpha) - f(\alpha) = 0,$$
ce qui contredit $(*)$.